Invariantenringe von Reflexionsgruppen

Martin Albrecht

AlZAGK Seminar
SoSe 2005

Einleitung

Wir betrachten im folgenden den einfachsten Fall der Hironaka Zerlegung, das ist der Fall wenn $C[x]^\Gamma = C[\theta_1, \ldots, \theta_n]$. In diesem Fall wird der Invariantenring von n algebraisch unabhängigen Invarianten erzeugt. Beispiele hierfür sind die symmetrischen Gruppen S_n der $n \times n$ Matrizen. Bevor jedoch die Matrixgruppen charakterisiert werden können, deren Invarianten Polynomringe bilden, müssen noch einige Begriffe eingeführt werden.

Begriffsbestimmung

Reflexion Eine Matrix bzw. eine lineare Transformation $\pi \in GL(C^n)$ wird Reflexion genannt, wenn genau ein Eigenwert von π nicht 1 ist[1]. Diese Matrizen haben die Form: $\begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$. Eine Reflexion σ hat die Eigenschaft, dass die Abbildung $\sigma - id$ eine Hyperebene ist. Die hier betrachteten Reflexionen werden manchmal auf „Pseudoreflexionen“ oder „generaliserte Reflexionen genannt“.

Reflexionsgruppe Eine endliche Gruppe wird *Reflexionsgruppe* genannt, wenn sie durch Reflexionen entstanden ist. Die Eigenschaft eine Reflexionsgruppe zu sein, hängt nicht von der abstrakten Gruppe, sondern ihrer Repräsentation ab.

[1] Das sind „generalisierte Reflexionen“, die üblichen Reflexionen sind solche, bei denen der $n$te Eigenwert -1 ist.

Hauptsatz (Shephard-Todd-Cevalley theorem)

Der Invariantenring $C[x]^\Gamma$ einer endlichen Marixgruppe $\Gamma \subset GL(C^n)$ wird von n algebraisch unabhängigen homogenen Invarianten erzeugt, genau dann wenn Γ eine Reflexionsgruppe ist.

Der Kern der linearen Abbildung $\sigma - id$ ist eine Hyperfläche H_σ in C^n. Sei dann L_σ das lineare Polynom, wessen Nullstellenmenge H_σ ist („whose zero set is the hyperplane“).

Lemma

Für alle Polyonme $f \in C[x]$ gilt, dass das lineare Polynom L_σ ein Teiler des Terms $\sigma f - f$ ist.

Beweis

Sei $v \in C^n$ mit $L_\sigma(v) = 0$, dann gilt

$$v \in H_\sigma \Rightarrow \sigma v = v \Rightarrow f(\sigma v) - f(v) = 0 \Rightarrow (\sigma f - f)(v) = 0 \tag{1}$$

Da das lineare Polynom L_σ irreduzibel ist, impliziert Hilberts Nullstellensatz, dass $\sigma f - f$ ein Vielfaches von L_σ ist.

Im folgenden sei $\Gamma \subset GL(C^n)$ eine endliche Reflexionsgruppe. Sei weiterhin I_Γ das Ideal in $C[x]$, welches durch alle homogenen invarianten von positivem Grad gebildet wird.

Proposition

Seien $h_1, h_2, \dots h_m \in C[x]$ homogene Polynome, seien $g_1, g_2, \dots, g_m \in C[x]^\Gamma$ Invarianten, and es gelte $g_1 h_1 + g_2 h_2 + \dots \ g_m h_m = 0$. Dann ist h_1 im Ideal I_Γ, genau dann wenn g_1 nicht im Ideal $< g_2, \dots \ , g_m >$ in $C[x]$ liegt.

Beweis per vollständiger Induktion über $deg(h_1)$

Wenn $h_1 = 0$, dann liegt $h_1 \in I_\Gamma$. Wenn $deg(h_1) = 0$, dann ist h_1 eine Konstante und damit liegt $g_1 \in < g_2, \dots, g_m >$. Also können wir davon ausgehen, dass $deg(h_1) > 0$ und dass die Annahme wahr ist für kleinere Grade.

Sei nun $g_1 \notin < g_2, \dots, g_m >$. Sei $\sigma \in \Gamma$ eine Reflexion. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{m} g_i \cdot (\sigma h_i) = \sigma(\sum_{i=1}^{m} g_i \cdot h_i) = \sigma(0) = 0$$

Durch das Lemma können wir σh_i als $h_i + L_\sigma \cdot \tilde{h}_i$, wobei $\tilde{h}_i$ ein homogenes Polynom vom Grad $deg(h_i) - 1$ ist. Es ergibt sich

$$0 = \sum_{i=1}^{m} g_i \cdot (h_i + L_\sigma \cdot \tilde{h_i}) = L_\sigma \cdot \sum_{i=1}^{m} g_i \tilde{h_i}$$

Dadurch gilt $g_1 \tilde{h_1} + g_2 \tilde{h_2} + \dots + g_m \tilde{h_m} = 0$. Nach Induktionsvorraussetzung ilt $\tilde{h_1} \in I_\Gamma$ und damit $\sigma h_1 - h_1 = \tilde{h_1} \cdot L_\sigma \in I_\sigma$.

Nun sei $\pi = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_l$ ein beliebiges Element aus Γ, geschrieben als Produkt von Reflexionen. Da das Ideal Invariant unter Γ ist gilt:

$$\begin{aligned} h_1^* - h_1 &= (\frac{1}{\#\Gamma} \sum_\pi \pi h_1) - h_1 \\ &= \frac{1}{\#\Gamma} (\sum_\pi (\pi h_1 - h_1)) \\ &= \frac{1}{\#\Gamma} (\sum_\pi (\sum_{i=1}^{l} (\sigma_1 \dots \sigma_i)(\sigma_{i+1} h_1 - h_1))) \in I_\Gamma \end{aligned}$$

Womit $h_1 \in I_\Gamma$ liegt.

„Hinrichtung“

Nach Hilberts Basissatz existiert für das Ideal I_Γ ein Erzeugendensystem homogener Invarianten $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\} \subset C[x]$. Das impliziert

$$C[x]^\Gamma = C[f_1, f_2, \ldots, f_m]$$

nach Theorem 2.1.3.

Ist m jetzt minimal mit dieser Eigenschaft, dann müssen wir jetzt beweisen, dass $m = n$, oder äquivalent, dass die Invarianten $f_1, f_2, \ldots, f_m$ algebraisch unabhängig über C sind.

Beweis per Widerspruch: Angenommen es exisitert ein nicht-null Polynom $g \in C[y_1, y_2, \ldots, y_n]$, so dass $g(f_1, f_2, \ldots, f_m) = 0$ in $C[x]$. Wir dürfen annehmen, dass g ist vom minimalen Grad und dass alle Monome $x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}$ vor dem Wegheben in der Entwicklung von $g(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ den selben Grad $d := i_1 + i_2 + \cdots + i_n$. haben.

Für $i = 1, 2, \ldots, m$ betrachte nun die Invarianten:

$$g_i := (\frac{\delta g}{\delta y_i})(f_1, f_2, \ldots, f_m) \in C[x]^\Gamma$$

Jedes solches g_i hat entweder Grad 0 oder $d - deg(f_i)$. Da $g(y_1, \ldots, y_m)$ nicht konstant ist, exisitert ein i mit $g_i = (\frac{\delta g}{\delta y_i}(y_1, \ldots, y_m) \neq 0$, durch die Wahl von g. Sei nun I das Ideal in $C[x]$ welches von $\{g_1, g_2, \ldots, g_m\}$ erzeugt wird und benenne die Elemente um, so dass I von $\{g_1, g_2, \ldots, g_k\}$ erzeugt wird, aber keiner echten Teilmenge. Für $i = k+1, \ldots, m$ schreiben wir $g_i = \sum_{j=1}^{k} h_{ij} g_j$ wobei h_{ij} entweder 0 ist, oder homogen vom Grad $deg(g_i) - deg(g_j) = deg(f_j) - deg(f_i)$.

Wir haben nun

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\delta}{\delta x_S}\left[g(f_1, f_2, \ldots, f_m))\right] \\
&= \sum_{i=1}^{m} g_i \frac{\delta f_i}{\delta x_S} \\
&= \sum_{i=1}^{k} g_i \frac{\delta f_i}{x_S} + \sum_{i=k+1}^{m} (\sum_{j=1}^{k} h_{ij} g_j) \frac{\delta f_i}{x_S} \\
&= \sum_{i=1}^{k} g_i (\frac{\delta f_i}{\delta x_S} + \sum_{j=k+1}^{m} h_{ij} \frac{\delta f_j}{\delta x_S})
\end{aligned}$$

Da $g_1 \notin < g_2, \ldots, g_k >$, impliziert die Proposition

$$\frac{\delta f_1}{\delta x_S} + \sum_{j=k+1}^{m} h_{j1} \frac{\delta f_j}{\delta x_S} \in I_\Gamma$$

für $s = 1, 2, \ldots, n$.

Mit x_S multipliziert, über s summiert und die Euler Formel angewendet ergibt sich

$$\begin{aligned}
& \sum_{s=1}^{n} x_S \frac{\delta f_1}{\delta x_S} + \sum_{j=k+1}^{m} h_{j1} \sum_{s=1}^{n} x_S \frac{\delta f_j}{\delta x_S} \\
\in\ & < x_1, \ldots, x_n > I_\Gamma \\
\subset\ & < x_1 f_1, \ldots, x_n f_1 > + < f_2, \ldots, f_m > \\
=\ & (deg f_1) f_1 + \sum_{j=k+1}^{m} h_{j1} (deg f_j) f_j
\end{aligned}$$

Da aber $deg(f_1) f_1$ nicht in $< x_1 f_1, \ldots, x_n f_1 >$ liegt, muss es in $< f_2, \ldots, f_m >$ liegen. Damit wäre m aber nicht minimal und der Beweis ist abgeschlossen.