MATEMATICA C^3

MATEMATICA DOLCE 5 - LICEI

Continuità e limiti

Versione accessibile

Matematicamente.it

Edizione - 2021

Matematica C^3– Matematica dolce 5 - licei

COORDINATORI DEL PROGETTO Daniele Zambelli.

AUTORI Leonardo Aldegheri, Elisabetta Campana, Luciana Formenti, Carlotta Gualtieri, Michele Perini, Maria Antonietta Pollini, Diego Rigo, Nicola Sansonetto, Andrea Sellaroli, Bruno Stecca, Daniele Zambelli .

HANNO COLLABORATO Alberto Bicego, Alessandro Canevaro, Alberto Filippini .

PROGETTAZIONE E IMPLEMENTAZIONE IN LATEX Dimitrios Vrettos.

COLLABORATORI Claudio Carboncini, Silvia Cibola, Tiziana Manca, Michele Perini, Andrea Sellaroli, Daniele Zambelli .

COLLABORAZIONE, COMMENTI E SUGGERIMENTI Se vuoi contribuire anche tu alla stesura e aggiornamento del manuale Matematica Dolce o se vuoi inviare i tuoi commenti e/o suggerimenti scrivi a daniele.zambelli@gmail.com.

Versione del documento: 8.0.0 del 27 agosto 2021.
Stampa edizione 2021: agosto 2021.
ISBN 9788899988074

DATI TECNICI PER L'ADOZIONE DEL LIBRO A SCUOLA
Titolo: Matematica C^3, Matematica dolce 5 - licei -2021.
Codice ISBN: 9788899988074
Editore: Matematicamente.it.
Anno di edizione: 2021.
Prezzo pdf: € 0,00.
Formato: ebook (PDF).

Indice

1 Funzioni: continuità e limiti **1**

1.1 Continuità 1

1.1.1 Definizione di continuità in un punto 1

1.1.2 Funzioni continue 3

1.1.3 Continuità in un intervallo 8

1.2 Limiti 10

1.2.1 Se non esiste $f(c+\varepsilon)$ per alcuni valori di ε 13

1.2.2 Se non esiste la parte standard 14

1.2.3 Se $\operatorname{st}(f(c+\varepsilon))$ varia al variare di ε 15

1.2.4 Limiti all'infinito 17

1.2.5 Calcolare limiti 19

1.2.6 Limiti notevoli 24

1.2.7 Limite ε - δ 28

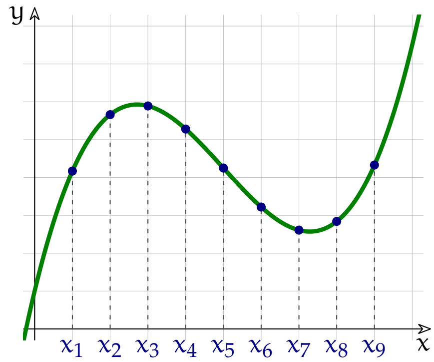
1.3 Esercizi 30

1.3.1 Esercizi dei singoli paragrafi 30

1 Funzioni: continuità e limiti

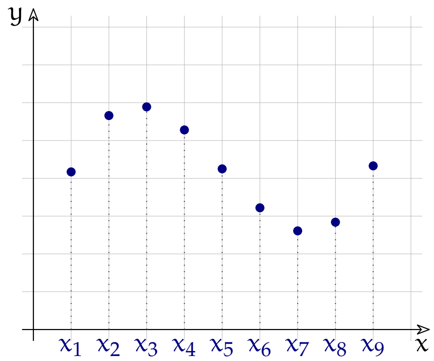
1.1 Continuità

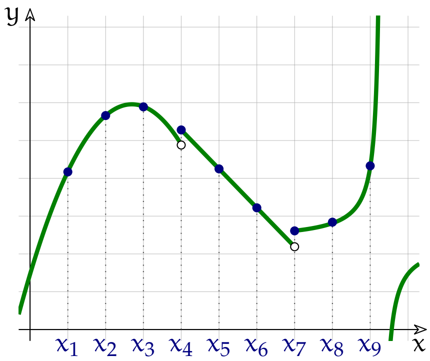
Spesso per analizzare un fenomeno, e la funzione che lo rappresenta, lo si valuta in vari punti di un intervallo $[a;\ b]$ durante il quale si svolge.



Considerando i valori di f in un numero finito di punti non si può dire di conoscere appieno le caratteristiche del fenomeno, ma, se è *sufficientemente regolare*, può darsi che i valori nei punti considerati diano già un'idea del fenomeno con una buona approssimazione.
Tanto è maggiore il numero dei punti considerati, tanto più ricca è l'informazione che si ricava.
Non solo, ma si possono fare delle considerazioni, più o meno attendibili, sull'andamento globale del fenomeno confrontando a due a due i valori rilevati.

Se la funzione è poco regolare, tracciare solo i punti corrispondenti ad alcuni valori può servirci poco.





Sono infinite le funzioni che passano per quell'insieme di punti. Se inoltre nel grafico ci sono dei salti, come nel secondo grafico in x_4 e x_7, risulta difficile tracciarla basandosi solo sui punti individuati, anche aumentando il loro numero.

Abbiamo detto che la curva deve essere "sufficientemente regolare", ma cosa significa essere *sufficientemente regolare*?

Nella prossima sezione parleremo di un certo tipo di regolarità molto importante che è la continuità di una funzione in un intervallo.

1.1.1 Definizione di continuità in un punto

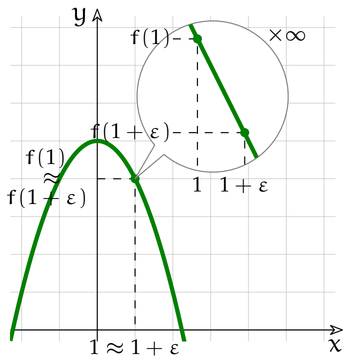
Intuitivamente possiamo dire che una funzione è *continua in un intervallo* se è rappresentata da una linea senza interruzioni e salti.

Per precisare questo concetto, partiamo da definire cos'è una funzione *continua in un punto* interno al suo insieme di definizione.

Definizione 1.1. Diremo che una funzione è **continua in un punto** c non isolato, se è definita in c e, quando x è infinitamente vicino a c, allora $f(x)$ è infinitamente vicino a $f(c)$,

e si scrive f è continua nel punto c se:	$\forall x \approx c \quad f(x) \approx f(c)$
oppure:	$\forall \varepsilon \approx 0 \quad f(c+\varepsilon) \approx f(c)$
oppure:	$\forall \varepsilon \approx 0 \quad f(c+\varepsilon) - f(c) \approx 0$
o ancora:	$\forall x$ se $\operatorname{st}(x) = c$ allora $\operatorname{st}(f(x)) = f(c)$

Esempio 1.1. Data la funzione $f(x) = -x^2 + 5$ dimostrare che $f(x)$ è continua in 1.



La funzione è continua in 1 se per ogni x infinitamente vicino a 1, $f(x)$ è infinitamente vicino a $f(1)$;
cioè se: $\quad \forall \varepsilon \approx 0 \quad f(1+\varepsilon) - f(1) \approx 0$

Dimostrazione

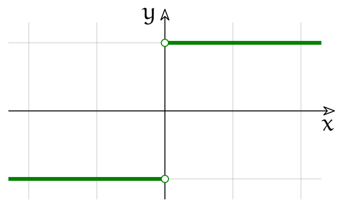
$$
\begin{aligned}
f(1+\varepsilon) - f(1) &= -(1+\varepsilon)^2 + 5 - \left(-1^2 + 5\right) = \\
&= \cancel{-1} - 2\varepsilon - \varepsilon^2 \cancel{+5} \cancel{+1} \cancel{-5} = \\
&= -2\varepsilon - \varepsilon^2 = \varepsilon(-2-\varepsilon)
\end{aligned}
$$

Ora, il prodotto tra un infinitesimo e un finito è un infinitesimo, quindi, se la distanza tra x e 1 è infinitesima, anche la distanza tra $f(x)$ e $f(1)$ è infinitesima. □

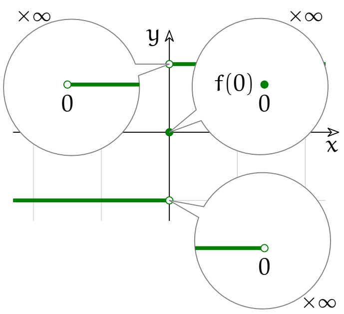
Esempio 1.2. Dimostrare che $f(x) = \frac{|x|}{x}$ non è continua in 0.

Dimostrazione

Perché una funzione sia continua per un certo valore di x lì deve essere definita. Quindi $f(x)$ non è continua dato che 0 non appartiene al suo insieme di definizione. Per essere pignoli, non ha senso chiedersi se una funzione sia continua in un punto dove non è neppure definita! □



Esempio 1.3. Studia la continuità in zero della funzione *segno*: $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ +1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$



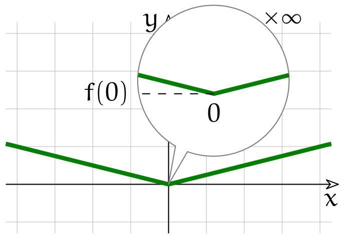
Svolgimento

La funzione non è continua in 0 dato che ci sono dei valori x infinitamente vicini a 0 ma tali che $f(x)$ non è infinitamente vicino a $f(0)$.
In questa funzione siamo addirittura nel caso in cui per *nessun* valore di x infinitamente vicino a zero ma diverso da zero, $f(x) \approx f(0)$. □

Esempio 1.4. Dimostrare che $f(x) = \frac{|x|}{4}$ è continua in 0.
Dimostrazione:

$$f(\varepsilon) - f(0) = \frac{|\varepsilon|}{4} - \frac{|0|}{4} = \frac{|\varepsilon|}{4} \approx 0 \quad \forall \varepsilon \approx 0$$

□



Esempio 1.5. Studia la continuità in $x_0 = 2$ della funzione: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - 2 & \text{se } x \leqslant 2 \\ x^2 - 6x + 7 & \text{se } x > 2 \end{cases}$

Per prima cosa dobbiamo verificare che la funzione sia definita per per $x = 2$ e trovare il suo valore: $f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2 - 2 = -1$

Dobbiamo quindi verificare che $f(x)$ sia infinitamente vicino a $f(2) = -1$, quando x è infinitamente vicino a 2.

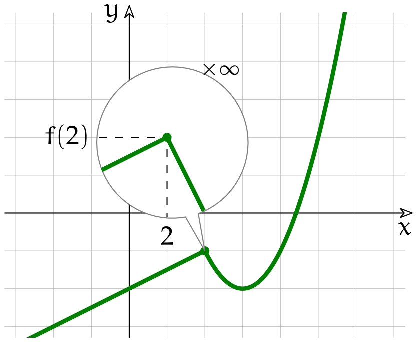
Dobbiamo distinguere i casi in cui ci avviciniamo a 2 da sinistra o da destra. In entrambi i casi consideriamo un qualunque infinitesimo *positivo* ε e esplicitiamo il segno:

da sinistra:

$f(2-\varepsilon) - f(2) = \frac{1}{2} \cdot (2-\varepsilon) - 2 - (-1) =$
$= 1 - \frac{\varepsilon}{2} - 2 + 1 = -\frac{\varepsilon}{2}$,
che è un infinitesimo $\forall \varepsilon \approx 0$.

da destra:

$f(2+\varepsilon) - f(2) =$
$(2+\varepsilon)^2 - 6 \cdot (2+\varepsilon) + 7 - (-1) =$
$4 + 4\varepsilon + \varepsilon^2 - 12 - 6\varepsilon + 7 + 1 =$
$\varepsilon^2 - 2\varepsilon$, che è un infinitesimo $\forall \varepsilon \approx 0$. □



1.1.2 Funzioni continue

Dimostrare che una funzione è continua in un punto è piuttosto laborioso, pur non essendo complicato, ma quando sono interessato a studiare la continuità di una funzione in un intervallo sorge un ulteriore problema. Infatti in un intervallo, anche piccolo, i punti sono infiniti e dimostrare la continuità per ognuno di essi risulta piuttosto lungo...

Per superare questo scoglio, i matematici hanno pensato un approccio diverso: generalizzare il problema studiando la continuità di intere funzioni.

A prima vista, questo può sembrare un modo per complicare il problema, invece permette di riconoscere la continuità di un gran numero di funzioni senza dover fare noiosi calcoli. La strada seguita consiste nei seguenti due passi:

- dimostrare che alcune funzioni elementari sono continue nel loro insieme di definizione;
- dimostrare che la combinazione di funzioni continue è ancora una funzione continua.

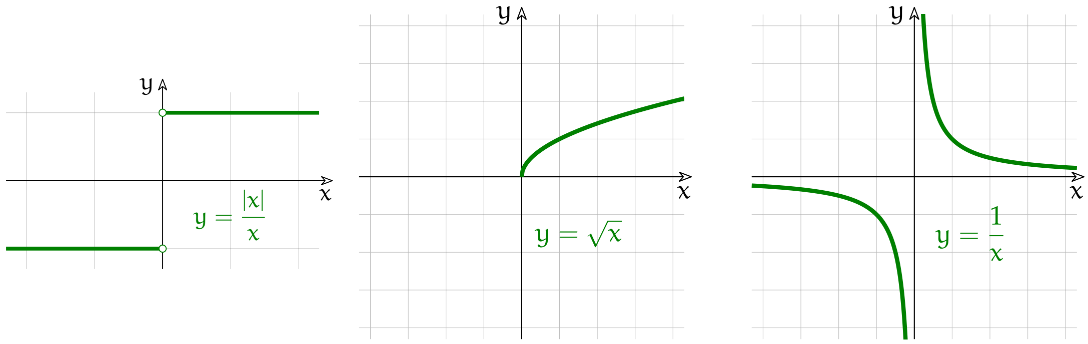
Di seguito vediamo qualche teorema che permette di stabilire la continuità di un gran numero di funzioni.

Funzione continua

Definizione 1.2. Una *funzione è continua* se è continua in ogni punto del suo insieme di definizione.

Quando voglio studiare se una funzione nel suo complesso è continua o no, lo dovrò fare tenendo conto del suo insieme di definizione: non ha senso domandarsi ad esempio se $f(x) = \sqrt{x}$ è continua in -5 dato che lì non è definita.

Alcuni grafici di funzioni continue:



Funzioni elementari

Dimostriamo la continuità di alcune funzioni elementari.

Teorema 1.1 (Continuità delle costanti)**.** *Le funzioni costanti (*$f(x) = k$*) sono continue.*

Ipotesi: $f(x) = k$. Tesi: $f(x + \varepsilon) \approx f(x) \quad \forall x$.

Dimostrazione Per la definizione di continuità vogliamo dimostrare che

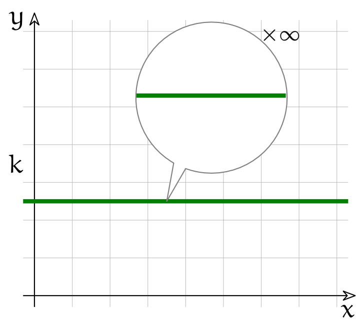
$$\forall x \quad f(x + \varepsilon) \approx f(x) \quad \forall \varepsilon \approx 0$$

Essendo la funzione costante,

$$f(x + \varepsilon) = k$$

che, ovviamente, è infinitamente vicino a $f(x) = k$. In simboli:

$$f(x + \varepsilon) = k \approx k = f(x) \qquad \square$$



Teorema 1.2 (Continuità della funzione identica)**.** *La funzione identica (*$f(x) = x$*) è continua.*

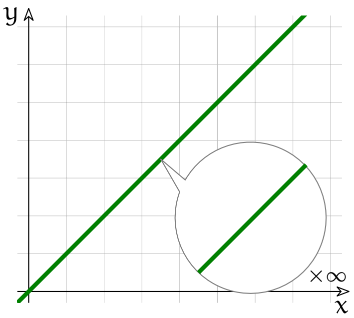
Ipotesi: $f(x) = x$. Tesi: $f(x + \varepsilon) \approx f(x) \quad \forall x$.

Dimostrazione Per la definizione di continuità vogliamo dimostrare che

$$\forall x \quad f(x+\varepsilon) \approx f(x) \quad \forall \varepsilon \approx 0$$

Essendo la funzione identica: $f(x+\varepsilon) = x+\varepsilon$. Che è infinitamente vicino a $f(x) = x$. In simboli:

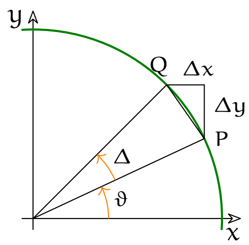
$$f(x+\varepsilon) = x+\varepsilon \approx x = f(x) \qquad \square$$



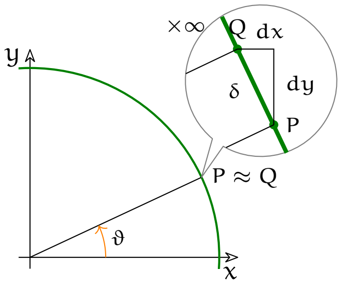
Teorema 1.3 (Continuità delle funzioni seno e coseno)**.** *Le funzioni seno* ($f(x) = \operatorname{sen} x$) *e coseno* ($f(x) = \cos x$) *sono continue.*

Il disegno riporta solo il primo quadrante, ma la dimostrazione è generale.
Dimostrazione Consideriamo un angolo ϑ e un incremento Δ di questo angolo.

Indichiamo con $\Delta(x)$ l'incremento del coseno e con $\Delta(y)$ l'incremento del seno corrispondenti all'incremento indicato con Δ: $\quad \Delta(x) = \Delta(\cos x) \quad$ e $\quad \Delta(y) = \Delta(\operatorname{sen} x)$. Il segmento PQ è la corda corrispondente all'arco Δ e come tutte le corde è minore dell'arco su cui insiste:



$$0 < \overline{PQ} < \overset{\frown}{PQ} = \Delta$$



Ora, se passiamo ad un incremento infinitesimo δ otteniamo la stessa situazione:

$$0 < \overline{PQ} < \overset{\frown}{PQ} = \delta$$

E dato che dx e dy sono minori di PQ che è un infinitesimo, anche $\Delta(\cos x)$ e $\Delta(\operatorname{sen} x)$ sono infinitesimi. $\square$

Teorema 1.4 (Continuità della funzione esponenziale in zero)**.** *La funzione esponenziale* ($f(x) = e^x$) *è continua in* 0*.*

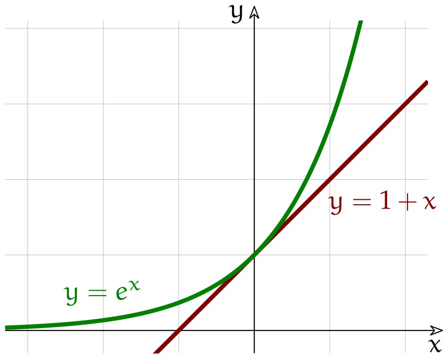
Ipotesi: $f(x) = e^x$.
Tesi: $f(\varepsilon) \approx f(0)$ cioè $e^{\varepsilon} \approx 1 \quad (\forall \varepsilon \approx 0)$.

Dimostrazione

Dimostriamo che, intorno allo zero, diciamo nell'intervallo $]-1;\ +1[$, la funzione $y = e^x$ è compresa tra due funzioni continue che in zero valgono 1 e poi dimostriamo la tesi.

Scegliamo
come funzione minorante: $g(x) = 1 + x$
come funzione maggiorante: $h(x) = \dfrac{1}{1-x}$

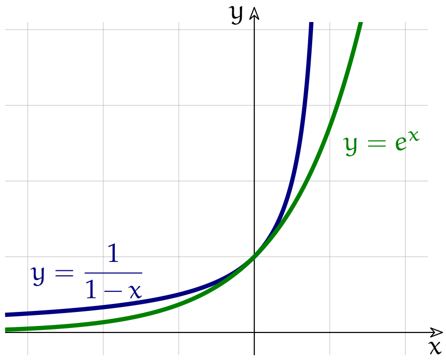
1. Nel primo passo dimostriamo che $e^x \geqslant 1 + x$.



$$\left(1+\frac{x}{1}\right)^1 = 1 + x$$
$$\left(1+\frac{x}{2}\right)^2 = 1 + \cancel{2}\frac{x}{\cancel{2}} + \frac{x^2}{2^2} > 1 + x$$
$$\left(1+\frac{x}{3}\right)^3 = 1 + \cancel{3}\frac{x}{\cancel{3}} + 3\frac{x^2}{3^2} + \frac{x^3}{3^3} > 1 + x$$
$$\left(1+\frac{x}{4}\right)^4 = 1 + \cancel{4}\frac{x}{\cancel{4}} + 6\frac{x^2}{4^2} + \dots > 1 + x$$
$$\dots$$
$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + \cancel{n}\frac{x}{\cancel{n}} + \dots > 1 + x$$

Per la proprietà di transfer, passando dal numero finito n al numero infinito N avremo ancora:
$$\left(1+\frac{x}{N}\right)^N = 1 + \cancel{N}\frac{x}{\cancel{N}} + \dots \geqslant 1 + x$$
Ma $\left(1+\frac{x}{N}\right)^N \approx e^x$ quindi:
$$e^x \geqslant 1 + x$$

2. Nel secondo passo dimostriamo che $e^x \leqslant \dfrac{1}{1-x}$



Abbiamo appena dimostrato che e elevato ad un qualunque esponente è maggiore di 1 più quell'esponente perciò

anche: $e^{-x} \geqslant 1 + (-x)$

cioè: $e^{-x} \geqslant 1 - x$

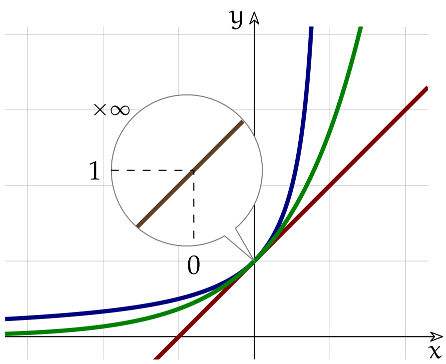
e passando ai reciproci: $\dfrac{1}{e^{-x}} \leqslant \dfrac{1}{1-x}$

ma: $\dfrac{1}{e^{-x}} = e^x$

Quindi: $e^x \leqslant \dfrac{1}{1-x}$

3. Ora dimostriamo la tesi:

Per il transfer quello che vale per x *reale*, vale anche per x *iperreale* e, in particolare, infinitesimo:
$$1 + x \leqslant e^x \leqslant \frac{1}{1-x}$$
per transfer:
$$1 + \varepsilon \leqslant e^\varepsilon \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon}$$



Ma questo ci dice che e^ε è compreso tra due numeri infinitamente vicini a 1 quindi anche lui sarà infinitamente vicino a 1:
$$1 \approx 1 + \varepsilon \leqslant e^\varepsilon \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon} \approx 1 \Rightarrow e^\varepsilon \approx 1 \quad \square$$

A questo punto e semplice dimostrare che la funzione esponenziale è continua.

Teorema 1.5 (Continuità della funzione esponenziale). *La funzione esponenziale ($y = e^x$) è continua.*

Ipotesi: $f(x) = e^x$. Tesi: $f(x+\varepsilon) \approx f(x) \quad \forall x$.

Dimostrazione Usiamo la prima proprietà delle potenze:

$$f(x+\varepsilon) = e^{x+\varepsilon} = e^x \cdot e^\varepsilon = e^x \cdot (1+\delta) = e^x + e^x \cdot \delta \approx e^x = f(x) \quad \square$$

Oltre alle funzioni precedenti, anche altre funzioni elementari sono continue, il seguente elenco riporta le principali funzioni continue:

- $y = k$
- $y = \frac{1}{x}$ *
- $y = |x|$
- $y = \log_a x$ *
- $y = \cos x$
- $y = x$
- $y = \sqrt[n]{x}$ *
- $y = a^x$
- $y = \operatorname{sen} x$
- $y = \operatorname{tg} x$ *

❑ **Osservazione** Le funzioni segnate da "*" non sono definite su tutto $\mathbb{R}$.

Composizione di funzioni

Vediamo ora che anche componendo in alcuni modi funzioni continue otteniamo ancora funzioni continue.

Teorema 1.6 (Somma di funzioni continue). *Se f e g sono funzioni continue, anche $f+g$ è continua.*

Ipotesi: $f(x)$ e $g(x)$ sono continue Tesi: $f(x)+g(x)$ è continua.

Dimostrazione Dato che sono continue, $f(x+\varepsilon) = f(x)+\alpha$ e $g(x+\varepsilon) = g(x)+\beta$ e dato che la somma di infinitesimi è un infinitesimo:

$$f(x+\varepsilon)+g(x+\varepsilon) = (f(x)+\alpha)+(g(x)+\beta) = f(x)+g(x)+(\alpha+\beta) \approx f(x)+g(x) \quad \square$$

Teorema 1.7 (Prodotto di funzioni continue). *Se f e g sono funzioni continue, anche $f \cdot g$ è continua.*

Ipotesi: $f(x)$ e $g(x)$ sono continue Tesi: $f(x) \cdot g(x)$ è continua.

Dimostrazione Dato che sono continue e dato che il prodotto tra un numero finito e un infinitesimo è un infinitesimo:

$$f(x+\varepsilon) \cdot g(x+\varepsilon) = (f(x)+\alpha) \cdot (g(x)+\beta) = f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot \beta + g(x) \cdot \alpha + \alpha \cdot \beta \approx f(x) \cdot g(x)$$

$\square$

Corollario 1.8. *Ogni funzione polinomiale è continua.*

Dimostrazione Dato che una funzione polinomiale si può ottenere partendo da funzioni costanti e da funzioni identiche attraverso moltiplicazioni e addizioni, la tesi consegue dai teoremi precedenti. $\square$

Esempio 1.6. Dimostrare che $f(x) = 2x^2 + 3$ è una funzione continua.

Dimostrazione $f(x) = 2x^2 + 3$ è continua perché è somma di due funzioni continue:

- $2x^2$ è continua perché è prodotto di due funzioni continue:
  - 2 è continua perché è una costante;
  - x^2 è continua perché è prodotto di due funzioni continue:
    - x è continua perché è una funzione identica;
    - x è continua perché è una funzione identica;
- 3 è continua perché è una costante. □

Teorema 1.9 (Funzioni di funzioni)**.** *Se $f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni continue, anche $f(g(x))$ è continua.*

Ipotesi: $f(x)$ e $g(x)$ sono continue Tesi: $f(g(x))$ è continua.

Dimostrazione Dato che g è continua:

$$f(g(x+\varepsilon)) = f(g(x)+\alpha)$$

e dato che f è continua:

$$f(g(x)+\alpha) = f(g(x))+\beta$$

quindi:

$$f(g(x+\varepsilon)) = f(g(x)+\alpha) = f(g(x))+\beta \approx f(g(x)) \quad \square$$

1.1.3 Continuità in un intervallo

Nello sviluppo dell'analisi hanno grande importanza le funzioni f puntualmente continue in *ciascun* punto di un intervallo chiuso $[a;\ b]$.

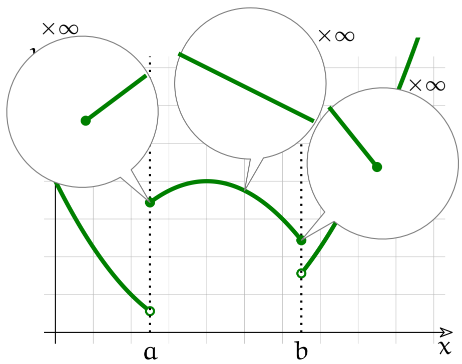
Diremo che una funzione f è puntualmente continua nell'intervallo $[a;\ b]$ se è *continua in ogni punto* c dell'intervallo:

$$f(x) \approx f(c) \ \text{ per ogni } \ x \ \text{ tale che } \ x \in [a;\ b] \ \text{ e } \ x \approx c.$$

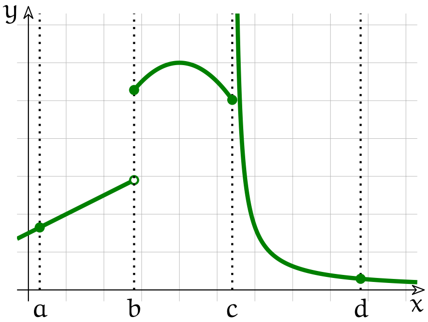
In questo caso diremo semplicemente che

la funzione f è continua nell'intervallo $[a;\ b]$.

Questa affermazione equivale a dire che:



- per i punti c interni all'intervallo $[a;\ b]$ (i punti che appartengono all'intervallo aperto $]a;\ b[$) per ogni infinitesimo ε si ha che $f(c+\varepsilon) \approx f(c)$;
- per gli estremi dell'intervallo ci si accontenterà di dire che è continua a destra in a e a sinistra in b, cioè, per ogni infinitesimo *positivo* ε, si ha che $f(a+\varepsilon) \approx f(a)$ e $f(b-\varepsilon) \approx f(b)$.
  Cioè con $\varepsilon > 0$:
  $\operatorname{st}(f(a+\varepsilon)) = f(a)$ e $\operatorname{st}(f(b-\varepsilon)) = f(b)$.



Esempio 1.7.
La funzione rappresentata qui a fianco, è continua nell'intervallo chiuso $[b;\ c]$ ma non lo è negli intervalli chiusi $[a;\ b]$ e $[c;\ d]$.
Si può dire comunque che è continua negli intervalli aperti: $[a;\ b[$ e $]c;\ d]$.

La definizione di continuità in un punto non ci è di grande aiuto per verificare se una funzione è continua in un intervallo, dato che dovremmo controllare la continuità in infiniti punti.

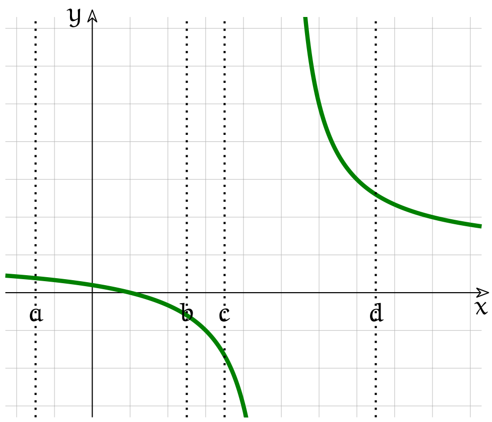
Si può seguire un'altra via:

Definizione 1.3. Una funzione è continua in un intervallo se:

- la funzione, ristretta a quell'intervallo, è continua e
- è definita in tutti i punti dell'intervallo.

Esempio 1.8. Data la funzione $f(x) = \dfrac{x-1}{x-5}$ stabilisci se la funzione è continua negli intervalli chiusi $A = [-1,5;\ +2,5]$ e $B = [+3,5;\ +7,5]$.

La funzione è continua (nel suo insieme di definizione) essendo una composizione di funzioni continue.



Perché sia continua negli intervalli richiesti basta che questi intervalli siano sottoinsiemi del suo insieme di definizione.

$$\text{I. D.} = \left]-\infty;\ +5\right[\cup \left]+5;\ +\infty\right[\ = \ \mathbb{R} \setminus \{+5\}$$

L'intervallo $A = [-1,5;\ +2,5]$ è del tutto contenuto in I. D.
L'intervallo $B = [+3,5;\ +7,5]$ ha un elemento, $+5$, che non appartiene a I. D.
Perciò $f(x)$ è continua nell'intervallo A e non è continua nell'intervallo B.

Esempio 1.9. Riprendendo la funzione dell'esempio 1.5 possiamo dire che tutta la funzione è continua in $\mathbb{R}$ dato che:

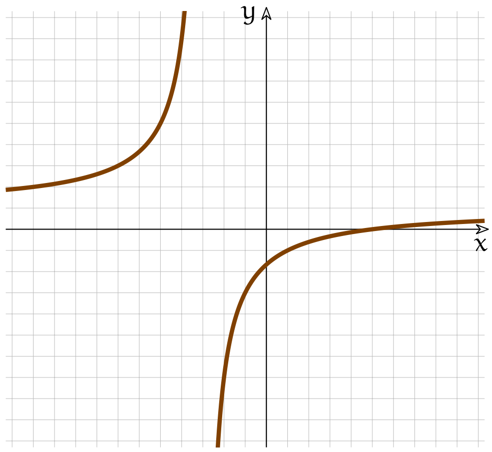
- è continua in $]-\infty;\ 2[$ poiché $x \mapsto \dfrac{1}{2}x - 2$ è una funzione polinomiale;
- è continua in 2 avendolo dimostrato nell'esempio;
- è continua in $]2;\ +\infty[$ poiché $x \mapsto x^2 - 6x + 7$ è una funzione polinomiale.

1.2 Limiti

[1] In alcuni problemi non siamo interessati a sapere come si comporta una funzione per un valore ben preciso (dove magari non è neppure definita), ci interessa di più sapere come si comporta quando la variabile x è *sufficientemente vicina* a quel valore.

Detto altrimenti, cerchiamo di rispondere alla domanda:
Per un certo valore di x la funzione potrebbe anche non *essere definita, ma cosa succede quando x si avvicina abbastanza a quel valore?*
Vediamo un esempio.

Esempio 1.10. Studia l'Insieme di Definizione della funzione: $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x^2 + 2x - 3}$, poi studia come si comporta la funzione per valori infinitamente vicini agli estremi dell'I. D.



La funzione è fratta e quindi non è definita quando il denominatore vale zero:

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \;\Rightarrow\; (x+3)\,(x-1) = 0$$
$$\Rightarrow\; x_1 = -3;\; x_2 = +1$$

L'insieme di definizione è formato quindi dall'unione dei seguenti intervalli:

$]-\infty; -3[\quad \cup \quad]-3; +1[\quad \cup \quad]+1; -\infty[$

oppure $\quad \mathbb{R} \setminus \{-3; +1\}$

Calcoliamo alcuni valori della funzione "vicini" ai 4 estremi dell'Insieme di Definizione:

$-\infty$

x	$f(x)$
-100	$+1.0825$
-1000	$+1.0080$
-10000	$+1.0008$
$\dots$	

-3

x	$f(x)$
-3.100	$+81.0$
-3.010	$+801.0$
-3.001	$+8001.0$
$\dots$	
-2.999	-7999.0
-2.990	-799.0
-2.900	-79.0

$+1$

x	$f(x)$
$+0.900$	-1.0513
$+0.990$	-1.0050
$+0.999$	-1.0005
$\dots$	
$+1.001$	-0.9995
$+1.010$	-0.9950
$+1.100$	-0.9512

$+\infty$

x	$f(x)$
$+100$	$+0.9223$
$+1000$	$+0.9920$
$+10000$	$+0.9992$
$\dots$	

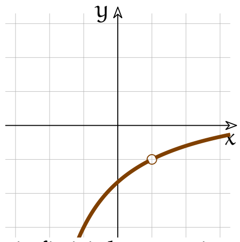
Possiamo osservare che:

- Quando x diventa sempre più negativo, $f(x)$ si avvicina a 1 dall'alto.
- Quando x si avvicina a -3 da sinistra, $f(x)$ diventa sempre più grande.
- Quando x si avvicina a -3 da destra, $f(x)$ diventa sempre più negativo.
- Quando x si avvicina a $+1$ da sinistra, $f(x)$ si avvicina a -1 dal basso.
- Quando x si avvicina a $+1$ da destra, $f(x)$ si avvicina a -1 dall'alto.
- Quando x diventa sempre più grande, $f(x)$ si avvicina a 1 dal basso.

[1] Per scrivere questo capitolo mi sono ispirato al testo di Howard Jerome Keisler, "Elementary Calculus: An Infinitesimal Approach". Chi volesse approfondire l'argomento può scaricare il testo all'indirizzo: www.math.wisc.edu/~keisler/calc.html

Osservando il grafico possiamo dire che:
- Quando x si avvicina a -3, la funzione da un lato diventa sempre più grande, dall'altro sempre più piccola (sempre più negativa);
- quando x vale proprio -3, la funzione non è definita.
- Quando x si avvicina a $+1$, la funzione, da entrambi i lati si avvicina a -1;
- quando x vale proprio $+1$, la funzione non è definita.

❑ **Osservazione** Nel tratto crescente della funzione, che appare come linea continua, in realtà manca un punto: il punto $(1; -1)$. Questo punto mancante è invisibile essendo infinitamente piccolo, quindi il grafico della funzione appare continuo. Possiamo indicare un punto mancante in una linea usando un cerchietto vuoto come nell'ingrandimento a fianco.



Alcuni matematici del 1800, rifiutandosi di usare infinitesimi e infiniti, hanno ricostruito la matematica creata nei secoli precedenti usando il concetto di *limite*. I *limiti* studiano il comportamento di una funzione quando x è infinitamente vicino ad un certo valore ma diverso da quel valore. La definizione di limite perfezionata da Weierstrass è piuttosto complessa e la vedremo alla fine del capitolo. Noi che usiamo numeri infinitesimi e infiniti diremo che:

Definizione 1.4. Il numero reale L è il **limite** della funzione $f(x)$ per x che tende a un valore c se $f(x)$ è infinitamente vicino a L per tutti gli x infinitamente vicini a c e diversi da c.

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \quad \text{se} \quad \forall x \approx c \quad \text{e} \quad x \neq c, \quad f(x) \approx L$$

Dato che il numero reale infinitamente vicino ad un iperreale è proprio il risultato della parte standard, possiamo scrivere:

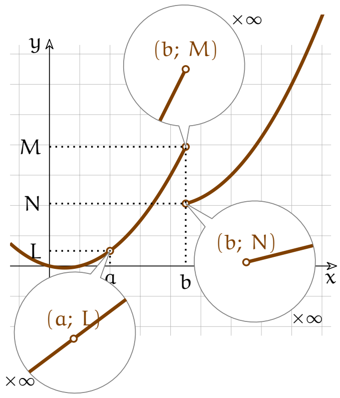
$$\lim_{x \to c} f(x) = \mathrm{st}\left(f(c + \varepsilon)\right)$$

se questa parte standard esiste e è sempre la stessa per ogni infinitesimo $\varepsilon \neq 0$.

Esempio 1.11. Consideriamo la funzione f il cui grafico è riportato a fianco. Possiamo osservare che la funzione è continua (perché?) e che non è definita per $x = a$ e $x = b$, quindi:

$$\mathrm{I.D.} = \mathbb{R} \setminus \{a;\ b\}$$

Possiamo studiare il limite per $x \to a$ e $x \to b$.



$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

dato che per ogni x infinitamente vicino a a e diverso da a, $f(x)$ è infinitamente vicino a L.

$$\lim_{x \to b} f(x) = \text{ non esiste}$$

perché per alcuni x infinitamente vicini a b, $f(x)$ è infinitamente vicino a M e per alcuni x sempre infinitamente vicini a b, $f(x)$ è infinitamente vicino a N.

La definizione di limite richiede soltanto il concetto di *infinitamente vicino*, la sua formulazione con la parte standard fornisce un metodo per *calcolarlo*:

Procedura 1.10. *Per calcolare il limite finito di una funzione per $x \to c$*

1. *il primo passo consiste nel calcolare il valore di $f(c+\varepsilon)$;*
2. *se è possibile, si calcola parte standard;*
3. *se il valore di $\operatorname{st}(f(c+\varepsilon))$ è indipendente dal valore di ε, questo è il limite.*

Esempio 1.12. Riprendiamo il primo esempio presentato in questa sezione e calcoliamo il limite: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-6x+5}{x^2+2x-3}$.

Studia il comportamento della funzione $f(x) = \dfrac{x^2-6x+5}{x^2+2x-3}$ vicino a 2.

$$f(1+\varepsilon) \overset{1}{=} \frac{(1+\varepsilon)^2-6(1+\varepsilon)+5}{(1+\varepsilon)^2+2(1+\varepsilon)-3} = \frac{\cancel{1}+2\varepsilon+\varepsilon^2\cancel{-6}-6\varepsilon\cancel{+5}}{\cancel{1}+2\varepsilon+\varepsilon^2\cancel{+2}+2\varepsilon\cancel{-3}} \overset{2}{=} \frac{-4\varepsilon+\varepsilon^2}{+4\varepsilon+\varepsilon^2} \overset{3}{=} \frac{\cancel{\varepsilon}(-4+\varepsilon)}{\cancel{\varepsilon}(+4+\varepsilon)}$$

Dato che il valore ottenuto è finito (il quoziente di due finiti non infinitesimi) possiamo calcolare la parte standard:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-6x+5}{x^2+2x-3} \overset{4}{=} \operatorname{st}\left(\frac{-4+\varepsilon}{+4+\varepsilon}\right) \overset{5}{=} \frac{\operatorname{st}(-4+\varepsilon)}{\operatorname{st}(+4+\varepsilon)} \overset{6}{=} \frac{-4}{+4} = -1$$

Dato che il valore ottenuto è indipendente dall'infinitesimo ε, -1 è il limite cercato.

Motivazione dei vari passaggi:

1. calcoliamo $f(1+\varepsilon)$;
2. otteniamo il rapporto tra due infinitesimi;
3. possiamo raccogliere e semplificare ε;
4. dato che abbiamo ottenuto un valore finito possiamo applicare la parte standard;
5. dato che il denominatore non è infinitesimo, la parte standard della frazione è uguale al rapporto delle parti standard del numeratore e del denominatore;
6. la parte standard di un reale più un infinitesimo è il reale stesso.

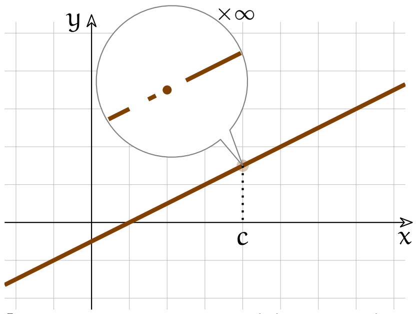
Casi in cui il limite finito non esiste

Il calcolo del limite presentato sopra permette di calcolare il limite finito solo se ci sono alcune condizioni, ma in vari casi può fallire. I motivi per cui può fallire sono:

1. la funzione $f(c+\varepsilon)$ non è definita per alcuni valori dell'infinitesimo $\varepsilon \neq 0$;
2. la funzione $f(c+\varepsilon)$ dà come risultato un valore infinito e quindi non ha parte standard;
3. al variare dell'infinitesimo ε la parte standard $\operatorname{st}(f(c+\varepsilon))$ non è sempre la stessa.

Nelle prossime sezioni vedremo quando è possibile, comunque, ricavare delle informazioni interessanti in alcune delle situazioni elencate sopra.

1.2.1 Se non esiste $f(c+\varepsilon)$ per alcuni valori di ε



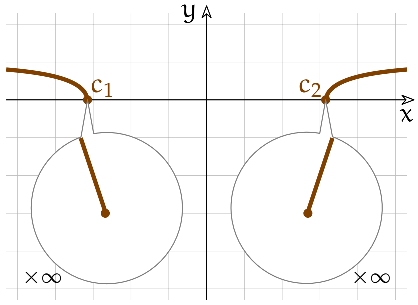
Potremmo trovarci nella situazione nella quale, a distanza infinitesima non nulla da un certo valore c, la funzione non sia definita.
In questo caso il limite non esiste.

Ma potremmo trovarci in una situazione fortunata se la funzione è sempre definita a sinistra o a destra del punto c.

In questo caso potremmo parlare di limite sinistro o di limite destro della funzione.

Ad esempio nella situazione rappresentata a fianco, la funzione è sempre definita a sinistra del punto c_1 e a destra del punto c_2. Pur non esistendo i limiti in c_1 e c_2, potremo dire che esiste il limite sinistro per x che tende a c_1 e il limite destro per x che tende a c_2, e diremo:

$$\lim_{x \to c_1^-} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to c_2^+} f(x) = 0$$



Definizione 1.5. Il numero reale L è il **limite sinistro** della funzione $f(x)$ per x che tende a un valore c se $f(x)$ è infinitamente vicino a L per tutti gli x infinitamente vicini a c e minori di c. E si scrive:

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = L \quad \text{se e solo se} \quad \forall x \approx c \quad \text{e} \quad x < c, \quad f(x) \approx L$$

Dato che il numero reale infinitamente vicino ad un iperreale è proprio il risultato della parte standard, possiamo scrivere:

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \text{st}\left(f(c+\varepsilon)\right)$$

se questa parte standard esiste e è sempre la stessa per ogni infinitesimo $\varepsilon < 0$.

Definizione 1.6. In modo simmetrico si definisce il **limite destro**

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = L \quad \text{se e solo se} \quad \forall x \approx c \quad \text{e} \quad x > c, \quad f(x) \approx L$$

Oppure:

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \text{st}\left(f(c+\varepsilon)\right)$$

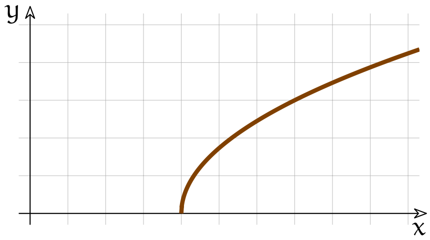
se questa parte standard esiste e è sempre la stessa per ogni infinitesimo $\varepsilon > 0$.

Esempio 1.13. Studia il comportamento della funzione $f(x) = \sqrt{3x-12}$ vicino a 4.

Per prima cosa studiamo l'I. D. della funzione. L'argomento della radice quadrata deve essere maggiore o uguale a zero:

$$3x - 12 \geqslant 0 \;\Rightarrow\; 3x \geqslant 12 \;\Rightarrow\; x \geqslant 4$$

Quindi: I. D. $= [4;\ \infty[$



Calcoliamo il valore della funzione per valori dell'ascissa infinitamente vicini a 4:

$$f(4+\varepsilon) = \sqrt{3\,(4+\varepsilon) - 12} = \sqrt{\cancel{+12} + 3\varepsilon \cancel{-12}} = \sqrt{3\varepsilon}$$

La radice è definita solo per valori positivi di ε, quindi non esiste il limite, ma possiamo calcolare il limite destro:

$$\lim_{x \to 4^+} \sqrt{3x-12} = \mathrm{st}\left(\sqrt{3\varepsilon}\right) = \sqrt{\mathrm{st}\,(3\varepsilon)} = \sqrt{0} = 0$$

Poiché il risultato non dipende dal particolare infinitesimo scelto, il valore ottenuto è il limite cercato.

1.2.2 Se non esiste la parte standard

La funzione parte standard è definita solo per valori finiti dell'argomento. Può succedere che $f(c+\varepsilon)$ sia un numero infinito. Questa situazione può essere interessante, così interessante da meritare un ampliamento della definizione.

Infinito: ∞

Tutti i numeri reali sono finiti, quando vogliamo descrivere il comportamento di una funzione che cresce sempre di più dobbiamo utilizzare un simbolo che non fa parte dell'insieme dei reali.

Il simbolo ∞ non indica un numero, ma un comportamento. Precisiamo il significato:

Definizione 1.7. Useremo:

- $+\infty$ per indicare il comportamento di una funzione che cresce sempre di più, cioè che assume valori maggiori di m qualunque sia $m \in \mathbb{R}$;
- $-\infty$ per indicare il comportamento di una funzione che diminuisce sempre di più, cioè che assume valori minori di m qualunque sia $m \in \mathbb{R}$;
- in alcuni libri con ∞ si intende $+\infty$;
- in altri libri con ∞ si intende un comportamento di una funzione che, in valore assoluto diventa grande più di ogni numero reale.

Dato che non c'è un uso concorde del simbolo "∞" in questo testo eviteremo di usarlo.

Possiamo ora ampliare la definizione di limite:

Definizione 1.8. Diremo che il **limite** della funzione $f(x)$ per x che tende a un valore c è $+\infty$ se per ogni x infinitamente vicini a c e diverso da c, $f(x)$ è un infinito positivo. E si scrive:

$$\lim_{x \to c} f(x) = +\infty \quad \text{se e solo se} \quad f(x) \ \text{è un infinito positivo} \qquad \forall x \approx c \quad \text{e} \quad x \neq c$$

Simmetricamente diremo che il **limite** della funzione $f(x)$ per x che tende a un valore c è $-\infty$ se per ogni x infinitamente vicini a c e diverso da c, $f(x)$ è un infinito negativo. E si scrive:

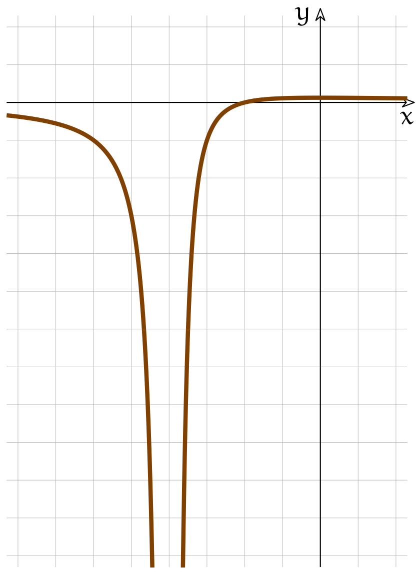
$$\lim_{x \to c} f(x) = -\infty \quad \text{se e solo se} \quad f(x) \ \text{è un infinito negativo} \qquad \forall x \approx c \quad \text{e} \quad x \neq c$$

Vediamo ora come applicare questa nuova definizione.

Esempio 1.14. Studia il comportamento della funzione $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2+8x+16}$ vicino a -4.

Per prima cosa calcoliamo il valore (iperreale) della funzione in un punto infinitamente vicino a -4.

$$\begin{aligned} f(-4+\varepsilon) &= \frac{(-4+\varepsilon)+2}{(-4+\varepsilon)^2 + 8(-4+\varepsilon) + 16} = \\ &= \frac{-4+\varepsilon+2}{\cancel{16} \cancel{-8\varepsilon} + \varepsilon^2 \cancel{-32} \cancel{+8\varepsilon} \cancel{+16}} = \\ &= \frac{-2+\varepsilon}{\varepsilon^2} \end{aligned}$$



Il valore ottenuto è un infinito perché è il rapporto tra un *non infinitesimo* e un *infinitesimo*.

Dato che per qualunque valore di ε il numeratore è negativo e il denominatore è positivo, il risultato è un infinito negativo:

$$\lim_{x \to -4} \frac{x+2}{x^2+8x+16} = -\infty$$

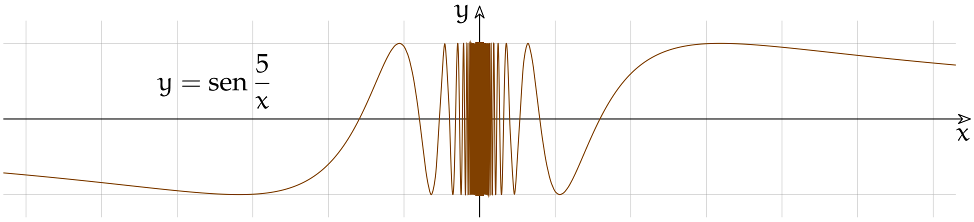
1.2.3 Se $\operatorname{st}(f(c+\varepsilon))$ varia al variare di ε

Può capitare che al variare del valore x infinitamente vicino a c la parte standard della funzione $f(x)$ assuma diversi valori. Ovviamente in questo caso il limite non esiste.

Una funzione interessante: $\operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$

Una funzione importante per esplorare situazioni strane attorno allo zero è: $f(x) = \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$.
Più $|x|$ diventa grande, più $\dfrac{1}{x}$ si avvicina a 0 e quindi anche $\operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ si avvicina all'asse x.

Ma la parte interessante della funzione è quella vicino allo 0: man mano che la variabile x si avvicina a 0, $\dfrac{1}{x}$ diventa sempre più grande e quindi $\operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ oscilla in modo sempre più fitto tra -1 e $+1$. Il grafico seguente si riferisce alla funzione $\operatorname{sen}\frac{5}{x}$, in questo modo il grafico è un po' stirato nel senso della larghezza e si può distinguere qualche oscillazione in più.



Il comportamento della funzione, attorno allo zero, si mantiene, per transfer, anche quando x è infinitamente vicino a zero. Quindi al variare di ε la funzione continuerà a oscillare tra -1 e $+1$ perciò, al variare di ε otterrò diversi valori di $\operatorname{st}\left(\operatorname{sen}\frac{1}{\varepsilon}\right)$.

Quindi concludiamo che il $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ *non esiste*.

Limite sinistro e destro

A volte possiamo trovarci in una situazione più fortunata: Potrebbe succedere che

- per tutti i valori di x minori di c e infinitamente vicini a c, $f(x)$ sia infinitamente vicino al valore M;
- per tutti i valori di x maggiori di c e infinitamente vicini a c, $f(x)$ sia infinitamente vicino al valore N.

In questi casi possiamo dire che, pur non esistendo il limite, esiste un *limite sinistro* o un *limite destro*.

Indicheremo il limite sinistro con un "meno" posto a esponente $(x \to c^-)$ e il limite destro con un "più" posto a esponente $(x \to c^+)$.

Possiamo ampliare le definizioni, già date, di limiti sinistro e destro tenendo conto anche dei limiti infiniti:

Definizione 1.9. Diremo che il *limite sinistro* per x che tende a c della funzione $f(x)$ è:

- $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = \operatorname{st}(f(c+\varepsilon))$ se $f(c+\varepsilon)$ è un numero finito e la sua parte standard è sempre la stessa per ogni infinitesimo $\varepsilon < 0$.
- $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = -\infty$ se $f(c+\varepsilon)$ è un numero infinito negativo per ogni infinitesimo $\varepsilon < 0$.
- $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = +\infty$ se $f(c+\varepsilon)$ è un numero infinito positivo per ogni infinitesimo $\varepsilon < 0$.

Definizione 1.10. Diremo che il *limite destro* per x che tende a c della funzione $f(x)$ è:

- $\lim_{x \to c^+} f(x) = st\,(f(c+\varepsilon))$ se $f(c+\varepsilon)$ è un numero finito e la sua parte standard è sempre la stessa per ogni infinitesimo $\varepsilon > 0$.
- $\lim_{x \to c^+} f(x) = -\infty$ se $f(c+\varepsilon)$ è un numero infinito negativo per ogni infinitesimo $\varepsilon > 0$.
- $\lim_{x \to c^+} f(x) = +\infty$ se $f(c+\varepsilon)$ è un numero infinito positivo per ogni infinitesimo $\varepsilon > 0$.

A questo punto possiamo dare una nuova definizione di limite:

Definizione 1.11. Se il limite sinistro e il limite destro hanno lo stesso valore L, diremo che questo è il limite della funzione.

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \quad \text{se e solo se} \quad \lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = L$$

Esempio 1.15. Calcola il limite $\lim_{x \to 0} \frac{-1}{x}$

1. Calcoliamo il valore della funzione nei punti infinitamente vicini a 0: $f(0+\varepsilon) = \frac{-1}{\varepsilon}$

   Il valore ottenuto è un infinito.

2. Possiamo allora passare alla seconda parte della definizione per vedere se esiste un limite infinito ... Niente da fare: dato che il segno dell'infinito $\frac{-1}{\varepsilon}$ è opposto a quello di ε, al variare di ε la funzione assumerà valori infiniti di segno diverso.

3. Possiamo studiare se esistono almeno i limiti sinistro o destro:

   per ogni ε negativo l'infinito che otteniamo è positivo, per ogni ε positivo l'infinito che otteniamo è negativo. Quindi:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{-1}{x} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{-1}{x} = -\infty$$

1.2.4 Limiti all'infinito

Abbiamo studiato il comportamento di una funzione che assume valori infiniti quando il suo argomento si avvicina ad un certo valore finito. Ora vogliamo studiare come si comporta una funzione quando il suo argomento è un infinito e scriveremo:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) \quad \text{o} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

Diamo per il limite all'infinito una definizione analoga a quella data per i limiti al finito.

Definizione 1.12. *Limite* della funzione $f(x)$ per x che tende a $-\infty$.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \operatorname{st}(f(M))$ se $f(M)$ è un numero finito e per ogni M infinito negativo la parte standard di $f(M)$ è sempre la stessa.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ se $f(M)$ è un infinito negativo per ogni infinito $M < 0$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ se $f(M)$ è un infinito positivo per ogni infinito $M < 0$.

Definizione 1.13. *Limite* della funzione $f(x)$ per x che tende a $+\infty$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \operatorname{st}(f(M))$ se $f(M)$ è un numero finito e per ogni M infinito positivo la parte standard di $f(M)$ è sempre la stessa.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ se $f(M)$ è un infinito negativo per ogni infinito $M > 0$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ se $f(M)$ è un infinito positivo per ogni infinito $M > 0$.

Esempio 1.16. Calcola i limiti: $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2 - 4x + 5}{x^2 - 2x + 3}$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 - 4x + 5}{x^2 - 2x + 3}$

Iniziamo calcolando $f(M)$ con M infinito negativo:

$$f(M) = \frac{3M^2 - 4M + 5}{M^2 - 2M + 3} \overset{1}{\sim} \frac{3\cancel{M^2}}{\cancel{M^2}} = 3$$

Dato che il risultato ottenuto è un finito:

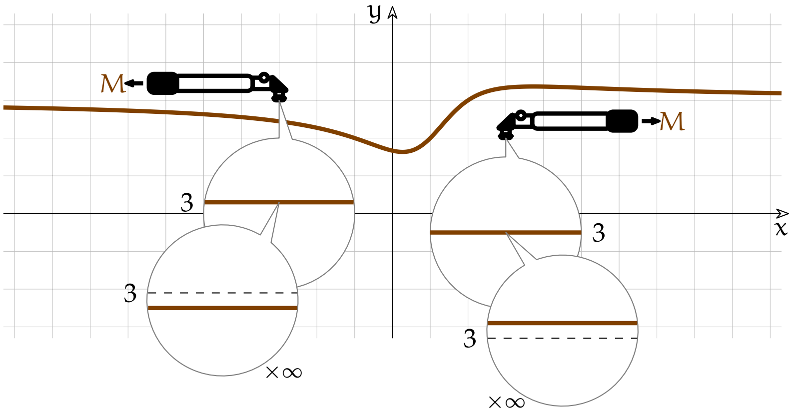
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 - 4x + 5}{x^2 - 2x + 3} = \operatorname{st}(f(M)) = \operatorname{st}(3) \overset{2}{=} 3$$

Dove le uguaglianze segnate hanno le seguenti giustificazioni:

1. sostituiamo numeratore e denominatore con espressioni indistinguibili (vedi la sezione sul confronto tra numeri iperreali).
2. La parte standard di un numero reale è il numero reale stesso.

Possiamo osservare che il risultato ottenuto sopra non dipende dal segno di M quindi anche:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 - 4x + 5}{x^2 - 2x + 3} = 3$$



1.2.5 Calcolare limiti

In questa sezione vengono presentati alcuni limiti, risolti e commentati. Rivediamo i procedimenti di calcolo.

Procedura 1.11. *Per calcolare il limite di una funzione per x che tende a un valore c finito iniziamo calcolando:* $f(c+\varepsilon)$

- *se* $\operatorname{st}(f(c+\varepsilon))$ *esiste e è sempre la stessa per ogni* $\varepsilon \neq 0$*:* $\lim_{x\to c} f(x) = \operatorname{st}(f(c+\varepsilon))$
- *se* $f(c+\varepsilon)$ *è un infinito negativo per ogni* $\varepsilon \neq 0$*:* $\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$
- *se* $f(c+\varepsilon)$ *è un infinito positivo per ogni* $\varepsilon \neq 0$*:* $\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$
- *se* $f(c+\varepsilon)$ *ha un comportamento diverso a seconda del segno di* ε*, possiamo cercare i limiti sinistro o destro restringendo i calcoli precedenti rispettivamente ai valori di* $\varepsilon < 0$ *e* $\varepsilon > 0$*.*

Procedura 1.12. *Per calcolare il limite di una funzione per* $x \to -\infty$ *iniziamo calcolando:* $f(M)$ *con l'infinito* $M < 0$

- *se* $\operatorname{st}(f(M))$ *esiste e è sempre la stessa per ogni* M*:* $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \operatorname{st}(f(M))$
- *se* $f(M)$ *è un infinito negativo per ogni* M*:* $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$
- *se* $f(M)$ *è un infinito positivo per ogni* M*:* $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$

Procedura 1.13. *Per calcolare il limite di una funzione per* $x \to +\infty$ *iniziamo calcolando:* $f(M)$ *con l'infinito* $M > 0$

- *se* $\operatorname{st}(f(M))$ *esiste e è sempre la stessa per ogni* M*:* $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \operatorname{st}(f(M))$
- *se* $f(M)$ *è un infinito negativo per ogni* M*:* $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$
- *se* $f(M)$ *è un infinito positivo per ogni* M*:* $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

Nei prossimi esempi applichiamo le procedure per il calcolo del limite ai diversi casi che potrai incontrare.

Esempio 1.17. Limite per $x \to +\infty$

Studia il comportamento di $\dfrac{3x^2-3x+7}{5x^2-6}$ per $x \to +\infty$.
Calcoliamo $f(x)$ in un generico infinito positivo M.

$$f(M) = \frac{3M^2-3M+7}{5M^2-6} \overset{1}{\sim} \frac{3\cancel{M^2}}{5\cancel{M^2}} = \frac{3}{5}$$

Dato che abbiamo ottenuto un valore finito:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-3x+7}{5x^2-6} = \operatorname{st}(f(M)) = \operatorname{st}\left(\frac{3}{5}\right) \overset{2}{=} \frac{3}{5}$$

Poiché la parte standard esiste e è sempre la stessa per ogni infinito $M > 0$.

Dove i passaggi hanno i seguenti motivi:

1. Sostituiamo l'espressione ottenuta con una espressione indistinguibile;
2. La parte standard di un valore reale è il reale stesso.

Esempio 1.18. Limite per $x \to c$

Studia il comportamento di $f(x) = x^2 - 4x + 2$ vicino a $+5$.
Calcoliamo $f(x)$ in $5 + \varepsilon$.

$$f(5+\varepsilon) = (5+\varepsilon)^2 - 4(5+\varepsilon) + 2 = 25 + 10\varepsilon + \varepsilon^2 - 15 - 4\varepsilon + 2 = 12 + 6\varepsilon + \varepsilon^2$$

Dato che abbiamo ottenuto un valore finito:

$$\lim_{x\to+5} f(x) = \operatorname{st}(f(5+\varepsilon)) = \operatorname{st}\left(12+6\varepsilon+\varepsilon^2\right) \overset{1}{=} \operatorname{st}(12) + \operatorname{st}(6\varepsilon) + \operatorname{st}\left(\varepsilon^2\right) \overset{2}{=} 12$$

Poiché la parte standard esiste e è sempre la stessa per ogni infinitesimo $\varepsilon \neq 0$.

Dove i passaggi hanno i seguenti motivi:

1. La parte standard di una somma è uguale alla somma delle parti standard;
2. La parte standard di un infinitesimo è zero.

Esempio 1.19. Metodo rapido, utilizzabile nelle funzioni polinomiali.
Riprendiamo l'esercizio precedente ma applichiamo la relazione di indistinguibilità prima di effettuare calcoli:

$$f(5+\varepsilon) = (5+\varepsilon)^2 - 4(5+\varepsilon) + 2 \overset{1}{\sim} (5)^2 - 4(5) + 2 = 25 - 15 + 2 = 12$$

Dato che abbiamo ottenuto un valore finito:

$$\lim_{x\to+5} f(x) = \operatorname{st}(f(5+\varepsilon)) = \operatorname{st}(12) \overset{2}{=} 12$$

Poiché la parte standard esiste e è sempre la stessa per ogni infinitesimo $\varepsilon \neq 0$.

1. Sostituiamo l'espressione con una espressione indistinguibile;
2. La parte standard di un valore reale è il reale stesso.

Esempio 1.20. Limite per $x \to 0$

Studia il comportamento di $\dfrac{x^2-4x+2}{x^2-4}$ vicino allo zero.
Calcoliamo il valore della funzione in un generico punto infinitamente vicino allo zero:

$$f(0+\varepsilon) = f(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2-4\varepsilon+2}{\varepsilon^2-4}$$

Dato che abbiamo ottenuto un valore finito (il rapporto tra due finiti non infinitesimi:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \mathrm{st}\left(f(\varepsilon)\right) = \mathrm{st}\left(\frac{\varepsilon^2-4\varepsilon+2}{\varepsilon^2-4}\right) \overset{1}{=} \frac{\mathrm{st}\left(\varepsilon^2-4\varepsilon+2\right)}{\mathrm{st}\left(\varepsilon^2-4\right)} \overset{2}{=} \frac{\mathrm{st}\left(\varepsilon^2\right)-\mathrm{st}\left(4\varepsilon\right)+\mathrm{st}\left(2\right)}{\mathrm{st}\left(\varepsilon^2\right)-\mathrm{st}\left(4\right)} = \frac{+2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

Poiché la parte standard esiste e è sempre la stessa per ogni infinitesimo $\varepsilon \neq 0$.

Dove i passaggi hanno i seguenti motivi:

1. La parte standard di un quoziente è uguale al quoziente delle parti standard se il denominatore non è un infinitesimo;
2. La parte standard di una somma è uguale alla somma delle parti standard.

Dato che il valore della funzione che calcoliamo ci serve per ottenere, eventualmente, la parte standard, possiamo utilizzare la relazione di indistinguibilità consumando un po' meno inchiostro:

Esempio 1.21. Limite per $x \to 0$

Studia il comportamento di $\dfrac{x^2-4x+2}{x^2-4}$ vicino allo zero.
Calcoliamo il valore della funzione in un generico punto infinitamente vicino allo zero:

$$f(0+\varepsilon) = f(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2-4\varepsilon+2}{\varepsilon^2-4} \overset{1}{\sim} \frac{+2}{-4}$$

Dato che abbiamo ottenuto un valore finito (il rapporto tra due finiti non infinitesimi:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \mathrm{st}\left(f(\varepsilon)\right) = \mathrm{st}\left(\frac{+2}{-4}\right) \overset{2}{=} -\frac{1}{2}$$

Poiché la parte standard esiste e è sempre la stessa per ogni infinitesimo $\varepsilon \neq 0$.

Dove i passaggi segnati hanno i seguenti motivi:

1. Applico la relazione di indistinguibilità;
2. La parte standard di un reale è il reale stesso.

Ora vediamo alcuni casi un po' più delicati: ricordiamoci che un numero iperreale diverso da zero non può mai essere dichiarato indistinguibile da zero.

Esempio 1.22. Infinitesimo fratto finito non infinitesimo $\left(\frac{i}{fni}\right)$.

Studia il comportamento di $\dfrac{x+5}{x-3}$ vicino a -5.

$$f(-5+\varepsilon) = \frac{-5+\varepsilon+5}{-5+\varepsilon-3} = \frac{\varepsilon}{-8+\varepsilon} \overset{1}{\sim} \frac{\varepsilon}{-8}$$

Abbiamo ottenuto un valore finito quindi:

$$\lim_{x\to -5} f(x) = \mathrm{st}\left(\frac{\varepsilon}{-8}\right) \overset{2}{=} \mathrm{st}\left(\delta\right) \overset{3}{=} 0$$

Dove i passaggi hanno i seguenti motivi:

1. Sostituiamo l'espressione ottenuta con una espressione indistinguibile.
2. Un infinitesimo diviso un finito non infinitesimo dà come risultato un infinitesimo.
3. La parte standard di un infinitesimo è zero.

Esempio 1.23. Finito non infinitesimo fratto infinitesimo $\left(\frac{fni}{i}\right)$.
Studia il comportamento di $\dfrac{-2x+4}{x-4}$ vicino a $+4$.

$$f(4+\varepsilon) = \frac{-2\,(4+\varepsilon)+4}{4+\varepsilon-4} = \frac{-4-2\varepsilon}{\varepsilon} \sim \frac{-4}{\varepsilon}$$

Il risultato ottenuto non è un finito quindi non possiamo applicare la funzione parte standard.

Il segno dell'infinito ottenuto dipende dal segno di ε quindi non esiste il limite, possiamo però calcolare i limiti sinistro e destro. Dato che il rapporto $\frac{-4}{\varepsilon}$ ha segno opposto a quello di ε:

$$\lim_{x\to+4^-} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+4^+} f(x) = -\infty$$

Esempio 1.24. Funzione irrazionale, con radici quadrate.
Studia il comportamento di $2x - \sqrt{4x^2-8x+3}$ per $x \to +\infty$.

$$f(M) = 2M - \sqrt{4M^2-8M+3} \overset{1}{\sim} 2M - \sqrt{4M^2} = 2M - 2M = 0$$

Si dovrebbe concludere che:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

Ma questa volta nei ragionamenti fatti c'è un errore. Proviamo a calcolare la funzione per alcuni valori abbastanza grandi di x.
I risultati dovrebbero avvicinarsi a zero, ma non è così, sembra si avvicinino, invece, a due. Dove abbiamo sbagliato?

x	y
100	2.00252
1000	2.00025
10000	2.00002

Nel passaggio (1) abbiamo usato in modo improprio la relazione *indistinguibile*: abbiamo ottenuto un'espressione indistinguibile da zero, ma ciò non è possibile (vedi la definizione di indistinguibile) . . .
Dobbiamo seguire un'altra strada.

Consideriamo l'espressione data come una frazione e razionalizziamo il numeratore:

$$f(M) = \frac{(2M) - \sqrt{4M^2-8M+3}}{1} \cdot \frac{(2M) + \sqrt{4M^2-8M+3}}{(2M) + \sqrt{4M^2-8M+3}} =$$
$$= \frac{\cancel{4M^2} - \cancel{4M^2} + 8M - 3}{2M + \sqrt{4M^2-8M+3}} \sim \frac{8M}{2M+\sqrt{4M^2}} = \frac{8M}{2M+2M} = \frac{8\cancel{M}}{4\cancel{M}} = 2$$

Dato che il valore ottenuto è finito e non dipende dal particolare infinito $M > 0$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \text{st}\,(2) = 2$$

In accordo con l'andamento della funzione calcolata in alcuni opportuni valori.

Esempio 1.25. Funzione razionale: metodo rapido ma non sempre funzionante.

Studia il comportamento di $\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$ per $x \to +2$.

$$f(2+\varepsilon) = \frac{(2+\varepsilon)^3+3\,(2+\varepsilon)^2+2\,(2+\varepsilon)}{(2+\varepsilon)^2-(2+\varepsilon)-6} \overset{1}{\sim} \frac{2^3+3\cdot 2^2+2\cdot 2}{2^2-2-6} = \frac{8+12+4}{4-2-6} = \frac{24}{-4} = -6$$

Dato che il valore ottenuto è finito e non dipende dal particolare infinitesimo ε:

$$\lim_{x\to+2} f(x) = \operatorname{st}(-6) \overset{2}{=} -6$$

Dove i passaggi hanno i seguenti motivi:

1. sostituiamo le espressioni tra parentesi con espressioni indistinguibili.
2. La parte standard di un reale è il reale stesso.

Ora vediamo un caso in cui il metodo precedente non funziona. Prima di affrontare l'esempio ricordiamoci che se non abbiamo maggiori informazioni sugli infinitesimi α e β, non possiamo calcolare $\frac{\alpha}{\beta}$.

Esempio 1.26. Funzione razionale: metodo rapido ma inconcludente.

Studia il comportamento di $\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$ per $x \to -2$.

$$f(-2+\varepsilon) = \frac{(2+\varepsilon)^3+3\,(2+\varepsilon)^2+2\,(2+\varepsilon)}{(2+\varepsilon)^2-(2+\varepsilon)-6} \overset{1}{\sim} \frac{(-2)^3+3\,(-2)^2+2\,(-2)}{(-2)^2-(-2)-6} = \frac{-8+12-4}{4+2-6} = \frac{0}{0}$$

Ma qui ci scontriamo con 2 problemi: abbiamo usato la relazione di indistinguibile con lo zero, e abbiamo ottenuto una divisione per zero che non è definita. Potremmo essere un po' più pignoli ma ancora troppo grossolani osservando che quando x è infinitamente vicino a -2 il numeratore e il denominatore sono infinitamente vicini a zero, sono cioè degli infinitesimi e quindi otteniamo: $\frac{\alpha}{\beta}$, ma anche questa maggior precisione non è sufficiente.

Esempio 1.27. Funzione razionale: Metodo lungo ma sicuro.

Studia il comportamento di $\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$ per $x \to -2$.

Dobbiamo rimboccarci le maniche e affrontare il calcolo algebrico (ricordandoci che: $(x+a)^3 = x^3+3x^2a+3xa^2+a^3$)

$$\begin{aligned}
f(-2+\varepsilon) &= \frac{(-2+\varepsilon)^3+3\,(-2+\varepsilon)^2+2\,(-2+\varepsilon)}{(-2+\varepsilon)^2-(-2+\varepsilon)-6} = \\
&= \frac{-8+12\varepsilon-6\varepsilon^2+\varepsilon^3+3\left(4-4\varepsilon+\varepsilon^2\right)-4+2\varepsilon}{4-4\varepsilon+\varepsilon^2-(-2+\varepsilon)-6} = \\
&= \frac{\cancel{-8}+\cancel{12\varepsilon}-6\varepsilon^2+\varepsilon^3+\cancel{12}\cancel{-12\varepsilon}+3\varepsilon^2\cancel{-4}+2\varepsilon}{\cancel{4}-4\varepsilon+\varepsilon^2\cancel{+2}-\varepsilon\cancel{-6}} = \\
&= \frac{\varepsilon^3+2\varepsilon}{\varepsilon^2-5\varepsilon} = \frac{\cancel{\varepsilon}\,(\varepsilon^2+2)}{\cancel{\varepsilon}\,(\varepsilon-5)} \overset{1}{\sim} \frac{+2}{-5}
\end{aligned}$$

Dato che il valore ottenuto è finito e non dipende dal particolare infinitesimo ε:

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \text{st}\left(\frac{+2}{-5}\right) \overset{2}{=} -\frac{2}{5}$$

Dove i passaggi hanno i seguenti motivi:
1. Sostituiamo l'espressione con una indistinguibile.
2. La parte standard di un reale è il reale stesso.

❑ **Osservazione** Pensate alla complicazione dei calcoli se ci fosse un qualche x^4 o x^5... Vedremo ora un altro modo di calcolare il limite che risulta meno complicato del precedente, ma ugualmente sicuro.

Prima di affrontare il prossimo metodo ricordiamoci che possiamo rappresentare tutti gli infinitesimi di ordine superiore ad un certo infinitesimo ε con il simbolo: $o(\varepsilon)$.

Esempio 1.28. Funzione razionale: altro metodo.
Studia il comportamento di $\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$ per $x \to -2$.

$$\begin{aligned}
f(-2+\varepsilon) &= \frac{(-2+\varepsilon)^3 + 3(-2+\varepsilon)^2 + 2(-2+\varepsilon)}{(-2+\varepsilon)^2 - (-2+\varepsilon) - 6} \overset{1}{=} \\
&\overset{2}{=} \frac{-8+12\varepsilon+12-12\varepsilon-4+2\varepsilon+o(\varepsilon)}{4-4\varepsilon+2-\varepsilon-6+o(\varepsilon)} = \\
&= \frac{\cancel{-8}\cancel{+12\varepsilon}\cancel{+12}\cancel{-12\varepsilon}\cancel{-4}+2\varepsilon+o(\varepsilon)}{\cancel{4}-4\varepsilon\cancel{+2}-\varepsilon\cancel{-6}+o(\varepsilon)} \overset{2}{\sim} \frac{+2\cancel{\varepsilon}}{-5\cancel{\varepsilon}} = -\frac{2}{5}
\end{aligned}$$

Dato che il valore ottenuto è finito e non dipende dal particolare infinitesimo ε:

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \text{st}\left(\frac{+2}{-5}\right) \overset{3}{=} -\frac{2}{5}$$

Dove i passaggi hanno i seguenti motivi:
1. Eseguiamo i calcoli riunendo in un unico simbolo la somma di tutti gli infinitesimi di ordine superiore a ε e perciò trascurabili (si spera);
2. Sostituiamo l'espressione con una indistinguibile.
3. La parte standard di un reale è il reale stesso.

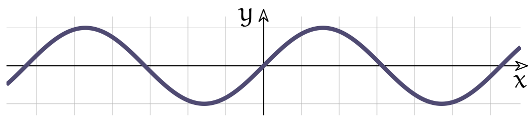
❑ **Osservazione** Se si annullassero anche tutti i termini contenenti ε, dovremmo esplicitare anche ε^2 raccogliendo in $o(\varepsilon^2)$ gli infinitesimi di ordine superiore a ε^2.

1.2.6 Limiti notevoli

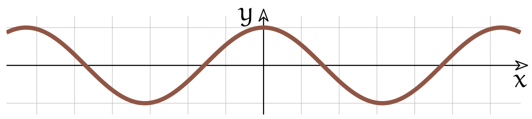
Ci sono alcuni limiti che hanno delle dimostrazioni particolari e che è utile conoscere per poter risolvere dei casi particolari.

Funzioni goniometriche

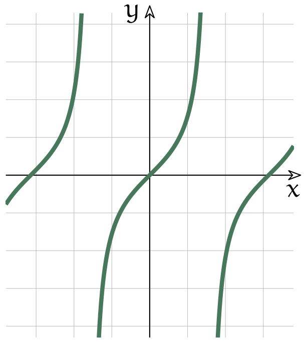
Se consideriamo le funzioni seno, coseno e tangente, possiamo vedere che alcuni limiti risultano banali, ma altri sono interessanti e possono essere dimostrati.



$y = \operatorname{sen} x$



$y = \cos x$



$y = \tan x$

Funzione seno

Osservando il grafico della funzione seno, risulta abbastanza evidente che:

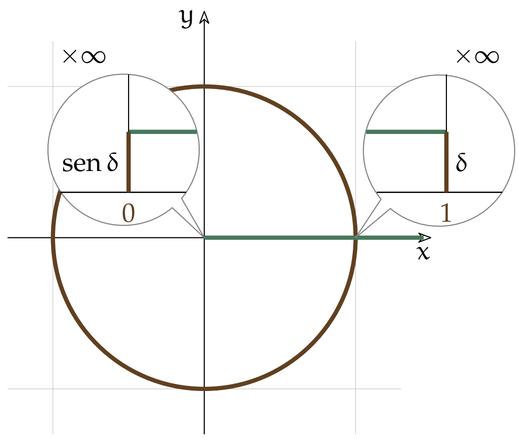
$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = \operatorname{st}(\operatorname{sen}\delta) = 0 \quad \text{e che} \quad \lim_{x\to\infty} \operatorname{sen} x = \operatorname{st}(\operatorname{sen} M) = \text{ non esiste}$$

Infatti man mano che x aumenta, $\operatorname{sen} x$ continua a variare tra -1 e $+1$ e quindi $\operatorname{sen} M$ non può essere infinitamente vicino ad un solo numero reale.

Ma il seguente è un limite notevole di cui proponiamo una dimostrazione grafica:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \operatorname{st}\left(\frac{\operatorname{sen}\delta}{\delta}\right) = 1$$

Una circonferenza non ha differenze reali da un poligono regolare di infiniti lati quindi un arco infinitesimo differisce dalla corda sottesa per infinitesimi di ordine superiore alle loro lunghezze. Perciò il loro rapporto è 1. Se rappresentiamo in una circonferenza goniometrica un arco di ampiezza infinitesima e il corrispondente seno, appaiono non distinguibili ad ogni ingrandimento finito. Se li ingrandiamo con un microscopio non standard che permetta di osservare δ, possiamo vedere che sono ancora indistinguibili cioè differiscono per infinitesimi di ordine superiore.



Quindi il loro rapporto è 1.
Questo significa che $\operatorname{sen}\delta$ e δ sono indistinguibili cioè $\operatorname{sen}\delta$ è diverso da δ solo per infinitesimi di ordine superiore a δ.

Funzione tangente

Anche nella funzione tangente valgono i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \tan x = \operatorname{st}(\tan\delta) = 0; \quad \lim_{x\to\infty} \tan x = \operatorname{st}(\tan M) = \text{ non esiste}; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \operatorname{st}\left(\frac{\tan\delta}{\delta}\right) = 1$$

per considerazioni analoghe a quelle fatte per la funzione seno.

Funzione coseno

Per la funzione coseno valgono i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0}\cos x = \operatorname{st}(\cos\delta) = 1;\ \lim_{x\to 0}(1-\cos x) = \operatorname{st}(1-\cos\delta) = 0;\ \lim_{x\to\infty}\cos x = \operatorname{st}(\cos M) = \text{ non es.}$$

Sono interessanti i seguenti due limiti che riguardano il coseno:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = \operatorname{st}\left(\frac{1-\cos\delta}{\delta}\right) \overset{1}{=} \operatorname{st}\left(\frac{1-\cos\delta}{\delta}\cdot\frac{1+\cos\delta}{1+\cos\delta}\right) \overset{2}{=} \operatorname{st}\left(\frac{1-\cos^2\delta}{\delta\,(1+\cos\delta)}\right) \overset{3}{=}$$
$$\overset{3}{=} \operatorname{st}\left(\frac{\operatorname{sen}^2\delta}{\delta\,(1+\cos\delta)}\right) \overset{4}{=} \operatorname{st}\left(\frac{\operatorname{sen}\delta}{\delta}\cdot\frac{\operatorname{sen}\delta}{1+\cos\delta}\right) \overset{5}{=} \operatorname{st}\left(1\cdot\frac{\delta}{2}\right) = 0$$

Dove i passaggi hanno i seguenti motivi:

1. moltiplico la funzione per una frazione equivalente a 1;
2. prodotto notevole;
3. ricordando che $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ e quindi: $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$;
4. per quanto visto sopra: $\frac{\operatorname{sen}\delta}{\delta} = 1$.
5. un infinitesimo fratto un non infinitesimo è un infinitesimo e la sua parte standard è 0.

❑ **Osservazione** Dato che $\operatorname{sen}\delta \sim \delta$, i seguenti due limiti sono equivalenti:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = \operatorname{st}\left(\frac{1-\cos\delta}{\delta}\right) = \operatorname{st}\left(\frac{1-\cos\delta}{\operatorname{sen}\delta}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

L'altro limite notevole, che si dimostra in modo analogo a quello precedente, è:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \operatorname{st}\left(\frac{1-\cos\delta}{\delta^2}\right) \overset{1}{=} \operatorname{st}\left(\frac{1-\cos\delta}{\delta^2}\cdot\frac{1+\cos\delta}{1+\cos\delta}\right) \overset{2}{=} \operatorname{st}\left(\frac{1-\cos^2\delta}{\delta^2\,(1+\cos\delta)}\right) \overset{3}{=}$$
$$\overset{3}{=} \operatorname{st}\left(\frac{\operatorname{sen}^2\delta}{\delta^2\,(1+\cos\delta)}\right) \overset{4}{=} \operatorname{st}\left(\left(\frac{\operatorname{sen}\delta}{\delta}\right)^2\cdot\frac{1}{(1+\cos\delta)}\right) \overset{5}{=} \operatorname{st}\left(1\cdot\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Dove i passaggi hanno i seguenti motivi:

1. moltiplico la funzione per una frazione equivalente a 1;
2. prodotto notevole;
3. ricordando che $\operatorname{sen}^x + \cos^2 x = 1$;
4. riscrivo l'espressione in un modo più comodo;
5. ricordando i limiti visti precedentemente.

Esponenziali e logaritmi

Numero di Eulero (o di Nepero) Ricordiamo come è definita la costante di Eulero:

$$e = \operatorname{st}\left(\left(1+\frac{1}{M}\right)^M\right) = \operatorname{st}\left((1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}\right)$$

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$$

Le definizioni sono equivalenti, mentre la seconda definizione risulta molto efficiente per il calcolo, la prima ha delle interessanti applicazioni matematiche.

Esempio 1.29. Limite di una particolare funzione logaritmica:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \operatorname{st}\left(\frac{\ln(1+\delta)}{\delta}\right) = \operatorname{st}\left(\frac{1}{\delta}\ln(1+\delta)\right) \overset{1}{=} \operatorname{st}\left(\ln(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}\right) \overset{2}{=} \operatorname{st}(\ln(e)) \overset{3}{=} 1$$

Dove i passaggi hanno i seguenti motivi:

1. per la proprietà dei logaritmi: prodotto di una funzione per un logaritmo;
2. l'argomento del logaritmo è proprio la definizione di e;
3. per la definizione di logaritmo: l'esponente da dare a e per ottenere e è 1.

Esempio 1.30. Come nell'esempio precedente ma con una base generica:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \operatorname{st}\left(\frac{\log_a(1+\delta)}{\delta}\right) \overset{1}{=} \operatorname{st}\left(\frac{\frac{\ln(1+\delta)}{\ln a}}{\delta}\right) = \operatorname{st}\left(\frac{\ln(1+\delta)}{\delta} \cdot \frac{1}{\ln a}\right) \overset{2}{=} \frac{1}{\ln a}$$

Dove i passaggi hanno i seguenti motivi:

1. cambio di base del logaritmo;
2. per quanto visto nell'esempio 1.29.

Esempio 1.31. Limite di una particolare funzione esponenziale:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \operatorname{st}\left(\frac{e^\varepsilon - 1}{\varepsilon}\right) \overset{1}{=} \operatorname{st}\left(\frac{\delta}{\ln(1+\delta)}\right) \overset{2}{=} 1$$

Dove i passaggi hanno i seguenti motivi:

1. operiamo una sostituzione: poniamo $e^\varepsilon - 1 = \delta$. Allora $e^\varepsilon = 1 + \delta$ quindi ε è l'esponente da dare a e per ottenere $1 + \delta$ cioè: $\varepsilon = \ln(1+\delta)$;
2. per quanto visto nell'esempio 1.29.

Esempio 1.32. Simile all'esempio precedente, ma con una base generica.

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \operatorname{st}\left(\frac{a^\varepsilon - 1}{\varepsilon}\right) \overset{1}{=} \operatorname{st}\left(\frac{\delta}{\log_a(1+\delta)}\right) \overset{2}{=}$$

$$\overset{2}{=} \operatorname{st}\left(\frac{\delta}{\frac{\ln(1+\delta)}{\ln a}}\right) = \operatorname{st}\left(\frac{\delta \cdot \ln a}{\ln(1+\delta)}\right) \overset{3}{=} \operatorname{st}(1 \cdot \ln a) = \ln a$$

Dove i passaggi hanno i seguenti motivi:

1. ancora una sostituzione: poniamo $a^\varepsilon - 1 = \delta$, allora $a^\varepsilon = 1 + \delta$ e $\varepsilon = \log_a(1+\delta)$;
2. applichiamo la formula del cambiamento di base di un logaritmo;
3. per quanto visto nell'esempio 1.29.

Esempio 1.33. Limite di una particolare funzione esponenziale:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x = \mathrm{st}\left(\left(1+\frac{k}{N}\right)^N\right) \overset{1}{=} \mathrm{st}\left(\left(1+\frac{1}{M}\right)^{kM}\right) \overset{2}{=} \mathrm{st}\left(\left[\left(1+\frac{1}{M}\right)^M\right]^k\right) \overset{3}{=} e^k$$

Dove i passaggi hanno i seguenti motivi:

1. se al posto di $\frac{k}{N}$ scrivo $\frac{1}{M}$ allora al posto di N dovrò scrivere $N = kM$ (infatti: $\frac{k}{N} = \frac{1}{M} \Leftrightarrow kM = 1N$);
2. la potenza di potenza è una potenza che ha per base la stessa base e per …
3. l'espressione tra parentesi quadre è proprio la definizione di e.

1.2.7 Limite ε - δ

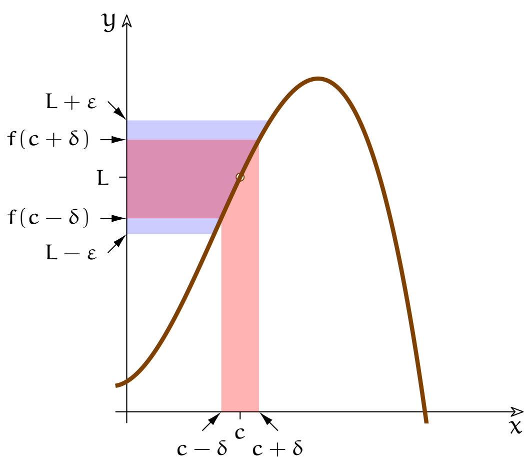
Nella seconda metà del 1800 i matematici Cauchy, Bolzano e Weierstrass hanno messo a punto il concetto di limite con la seguente definizione:

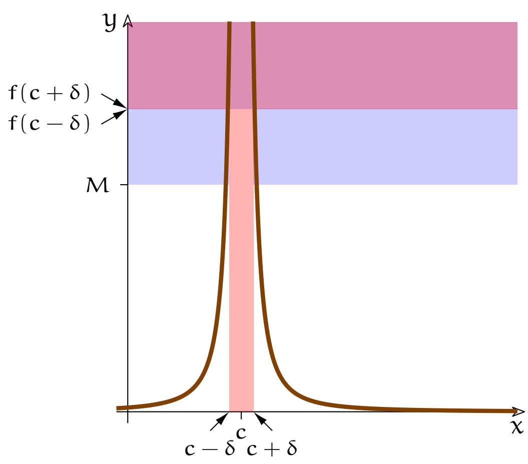
Definizione 1.14. Il numero reale L è il **limite finito** della funzione $f(x)$ per x che tende a un valore **c finito** se per ogni numero reale ε esiste un numero reale δ tale che per ogni x che dista da c meno di δ e è diverso da c, $f(x)$ dista da L meno di ε.

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \quad \text{se} \quad \forall\varepsilon > 0 \ \exists\delta > 0 \quad \text{tale che} \quad \forall x \quad \text{con} \quad 0 < |x-c| < \delta \quad \text{allora} \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Definizione 1.15. Il **limite** della funzione $f(x)$ per x che tende a un valore **c finito** è $+\infty$ se per ogni numero reale M esiste un numero reale δ tale che per ogni x che dista da c meno di δ e è diverso da c, $f(x)$ è maggiore di M.

$$\lim_{x\to c} f(x) = +\infty \quad \text{se} \quad \forall M \in \mathbb{R} \ \exists\delta > 0 \quad \text{tale che} \quad \forall x \quad \text{con} \quad 0 < |x-c| < \delta \quad \text{allora} \quad f(x) > M$$





In modo simile vengono definiti anche:

- il limite infinito negativo per x che tende a un finito;
- il limite finito per x che tende a un infinito positivo o a un infinito negativo;
- il limite infinito per x che tende a un infinito positivo o a un infinito negativo;
- i limiti sinistro e destro per x che tende a un finito.

La cosa interessante, per noi, è che i matematici hanno dimostrato che se un valore è il limite secondo la definizione dei Cauchy-Bolzano-Weierstrass lo è anche secondo la definizione non standard, e viceversa.

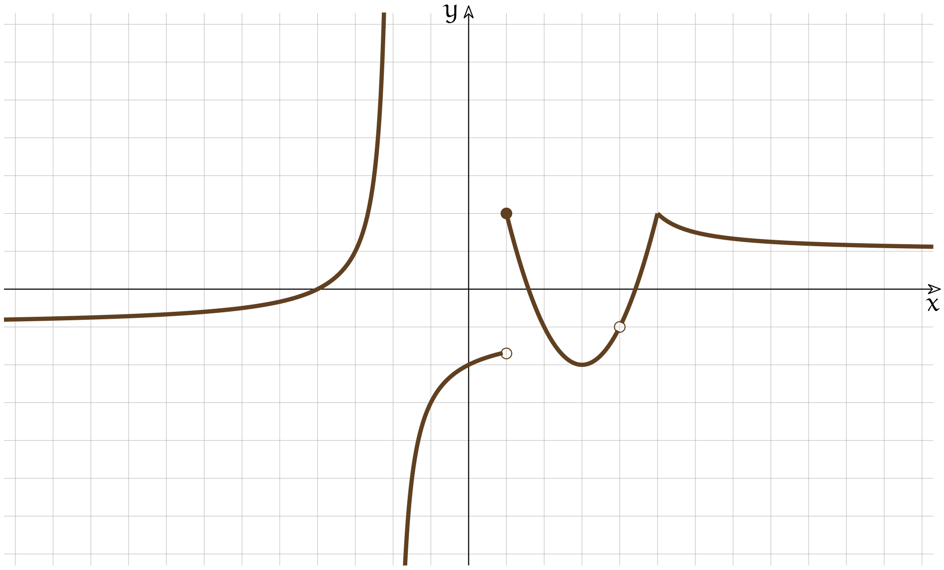
1.3 Esercizi

1.3.1 Esercizi dei singoli paragrafi

1.1 Continuità

1.1. Ricavare dal grafico della funzione rappresentata le seguenti caratteristiche:

a) dominio;
b) punti di discontinuità e loro classificazione;
c) asintoti.



1.2. Individua e classifica gli eventuali punti di discontinuità, in $\mathbb{R}$, delle seguenti funzioni:

a $y = \dfrac{3+x}{x^4+3x^3}$ [0: 2° tipo; −3: 3° tipo]

b $y = \dfrac{5}{3+5^{\frac{1}{x}}}$ [0: 1° tipo]

c $y = \dfrac{3x-3}{x^2-1}$ [−1: 2° tipo; +1: 3° tipo]

d $y = \dfrac{1}{3^{\frac{1}{x}}-1}$ [0: 1° tipo]

e $y = \dfrac{x-4}{x^2-16}$ [−4: 2° tipo; +4: 3° tipo]

f $y = \dfrac{6}{2^{\frac{1}{x-3}}+4}$ [+3: 1° tipo]

1.3. Determina per quale valore di k le seguenti funzioni sono continue:

a $y = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leqslant 1 \\ x^2-2x+1 & \text{se } 1 \leqslant x \leqslant 3 \\ 3x+k & \text{se } x > 3 \end{cases}$ [$k = -5$]

b $y = \begin{cases} x^2-2x+k & \text{se } x \leqslant 0 \\ \dfrac{2x-6}{x+3} & \text{se } x > 0 \end{cases}$ [$k = -2$]

c $y = \begin{cases} kx - 2 & \text{se } x < 1 \\ \dfrac{k}{x+1} & \text{se } x \geqslant> 0 \end{cases}$ [$k = +4$]

1.4. Studia la continuità delle seguenti funzioni e poi rappresentale:

a $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3 & \text{se } x < 0 \\ e^x + 2 & \text{se } x \geqslant 0 \end{cases}$ [continua in $\mathbb{R}$]

b $f(x) = \begin{cases} 1 - 2^x & \text{se } 0 \leqslant x < 1 \\ -\sqrt{x} & \text{se } 1 \leqslant x \leqslant 4 \end{cases}$ [continua nell'I.D.]

c $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leqslant -1 \\ 2x + 3 & \text{se } -1 < x < 0 \\ 4 & \text{se } x \geqslant 0 \end{cases}$ [discontinua in 0]

1.5. Studia la continuità delle seguenti funzioni e poi rappresentale:

a $y = x + \dfrac{1}{x}$ []

b $y = \dfrac{xe^x}{\sqrt{2x-1}}$ []

c $\dfrac{x^3+1}{x^2}$ []

d $\dfrac{x^2+4}{x-1}$ []

1.6. Disegnare il grafico di una funzione che abbia le seguenti caratteristiche:

a) è definita in $(-\infty;\ -1) \cup (-1;\ 0) \cup (0;\ +1) \cup (+1;\ +\infty)$;
b) ha come asintoti verticali solo le rette $x = -1;\ x = 0;\ x = 1$;
c) ha come asintoto orizzontale la retta $y = 0$;
d) è positiva per $-1 < x < 0 \quad \text{e} \quad x > 1$;
e) è simmetrica rispetto all'origine.

1.2 Limiti

1.7. Calcola i seguenti limiti:

a) $\lim_{x \to 3} \left(x^2 - 4x + 2\right)$ [-1]

b) $\lim_{x \to 1} \left(4x^2 - 5x + 8\right)$ [$+7$]

c) $\lim_{x \to -1} \left(7x^2 + 3x + 5\right)$ [$+9$]

d) $\lim_{x \to -2} \left(3x^2 + 2x + 6\right)$ [$+14$]

e) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 4x + 2}{x - 1}$ [-2]

1.8. Calcola i seguenti limiti:

a) $\lim_{x \to 2} \left(x^2 - 4\right)$ [0]

b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^3 - 4x}{2x^2 + 3x}$ [$-\frac{4}{3}$]

c) $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$ [∞]

d) $\lim_{x \to -1} \dfrac{(x+1)^2 (x-1)}{x^3 + 1}$ [0]

e) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^3 - 2x^2 + x}{2x^3 + x^2 - 2x}$ [$-\frac{1}{2}$]

f) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x+3}{(x-1)^2}$ [∞]

g) $\lim_{x\to 0} \frac{x^4-4x^3+x^2}{x^3+x^2+x}$ [0]

h) $\lim_{x\to -1} \frac{x^3+x^2+x+1}{x^4+x^2-2}$ [0]

i) $\lim_{x\to 2} \frac{(x+1)^2}{2-x}$ [∞]

j) $\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-3x+2}$ [1]

k) $\lim_{x\to 0} \frac{3x+2x^{-1}}{x+4x^{-1}}$ [$\frac{1}{2}$]

l) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{x^2-2x}$ [$\frac{1}{2}$]

m) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right)$ [-1]

n) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{x^2-2x}$ [$\frac{3}{2}$]

o) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+5}{x^2-3}$ [9]

p) $\lim_{x\to 1} \frac{3x^4-4x^3+1}{(x-1)^2}$ [6]

q) $\lim_{x\to -2} \frac{3x+6}{x^3+8}$ [$\frac{1}{4}$]

r) $\lim_{x\to 2} \frac{x+1}{x-1}$ [3]

s) $\lim_{x\to -2} \frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$ [$-\frac{2}{5}$]

t) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$ [0]

u) $\lim_{x\to 4} \frac{x^2+7x-44}{x^2-6x+8}$ [$\frac{15}{2}$]

v) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ [∞]

w) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-5x+4}{x^3-1}$ [$-\frac{2}{3}$]

x) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$ [4]

y) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ [4]

z) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{2}{x^4-1}\right)$ [$\frac{1}{2}$]

1.9. Calcola i seguenti limiti:

a) $\lim_{x\to \infty} \frac{x^2-1}{2x^2+1}$ [$\frac{1}{2}$]

b) $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^3+x^2-4}{2x^3+x+11}$ [$\frac{1}{2}$]

c) $\lim_{x\to \infty} \frac{3x^2+2x-1}{x^3-x+2}$ [0]

d) $\lim_{x\to \infty} \left(\frac{x^3}{x^2+2} - x\right)$ [0]

e) $\lim_{x\to \infty} \frac{x^2+3x-4}{3x^2-2x+5}$ [$\frac{1}{3}$]

f) $\lim_{x\to \infty} \frac{x(x-1)(x-2)}{x^2+6x-9}$ [∞]

g) $\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{x^2+9}}{x+3}$ [1]

h) $\lim_{x\to \infty} \left(\frac{x^2+x-1}{2x^2-x+1}\right)^3$ [$\frac{1}{8}$]

i) $\lim_{x\to \infty} \frac{x^2+2x+1}{5x}$ [∞]

j) $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^3+x^4-1}{2x^5+x-x^2}$ [0]

k) $\lim_{x\to \infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^2}{\sqrt[3]{x^6+1}}$ [4]

l) $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^6+7x^4-40}{1-x-5x^7}$ [0]

m) $\lim_{x\to \infty} \frac{(x+1)(x-2)}{3x^2+6x-5}$ [$\frac{1}{3}$]

n) $\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ [1]

o) $\lim_{x\to \infty} \left(\frac{3x^2+2x+1}{x^2-3x+2}\right)^4$ [81]

p) $\lim_{x\to -\infty} \frac{5x^3-x^2+x}{1-x-3x^2}$ [∞]

q) $\lim_{x\to \infty} \frac{1+x-3x^3}{1+x^2+3x^3}$ [-1]

r) $\lim_{x\to -\infty} \left(\frac{x^3-8}{x^4+16}\right)^{1} 0$ [0]

s) $\lim_{x\to \infty} \frac{(x+3)(x+4)(x+5)}{x^4+x-11}$ [0]

t) $\lim_{x\to -\infty} \frac{8x-2x^5+x^6}{11x+5x^3+3x^5}$ [$-\infty$]

u) $\lim_{x\to \infty} \left(\frac{x^3}{2x^2-1} - \frac{x^2}{2x+1}\right)$ [$\frac{1}{4}$]

v) $\lim_{x\to \infty} \left(x^2 - \frac{x^4-1}{x^2-2}\right)$ [-2]

w) $\lim_{x\to\infty} \frac{(x-1)^{100}(6x+1)^{200}}{(3x+5)^{300}}$ $\left[\left(\frac{4}{3}\right)^{100}\right]$

x) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[4]{x^5}+\sqrt[5]{x^3}+\sqrt[6]{x^8}}{\sqrt[3]{x^4+2}}$ $[1]$

y) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2(2x+1)(3x-2)}{2x^2(5x-8)(x+6)}$ $\left[\frac{3}{5}\right]$

z) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^8+8x^6+6x^4}{4x^8-x^6+12x^4}\right)^5$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

1.10. Calcola i seguenti limiti:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x}-1}{3x}$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ $[1]$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ $[-1]$

d) $\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-25}$ $\left[\frac{1}{40}\right]$

e) $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{x^3-5x^2+3x+9}$ $[\infty]$

f) $\lim_{x\to 9} \frac{3-\sqrt{x}}{27-\sqrt{x^3}}$ $\left[\frac{1}{27}\right]$

g) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$ $\left[\frac{2}{3}\right]$

h) $\lim_{x\to 1} \frac{x^{\frac{2}{3}}-1}{x^{\frac{2}{5}}-1}$ $\left[\frac{10}{9}\right]$

i) $\lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt[n]{x}}{1-\sqrt[m]{x}}$ $\left[\frac{m}{n}\right]$

j) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x}\right)$ $[0]$

k) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2-x}-x\right)$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

l) $\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2-x}-x\right)$ $[\infty]$

m) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x-3}-\sqrt{x}\right)$ $[0]$

n) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x-3}-\sqrt{x}\right)$ $\left[-\frac{3}{2}\right]$

o) $\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

p) $\lim_{x\to-\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ $[-\infty]$

q) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ $[0]$

r) $\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ $[\infty]$

s) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$ $[0]$

t) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{5}}{\sqrt{x}-5}$ $[1]$

u) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x^2-9}}{6x}$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

v) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2-9}}{6x}$ $[0]$

w) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x-1}-2x}{x-7}$ $[-2]$